

數學示例：含任意函數的解

我們在《數學示例：方程與解》中指出「 n 階常微分／差分方程」的通解一般帶有 n 個任意常數(arbitrary constant)，而「 n 階 m 元偏微分／差分方程」的通解則一般帶有 n 個 $m - 1$ 元任意函數(arbitrary function)¹，本文主旨是介紹求某些偏微分／差分方程通解的方法。

我們從 1 階 2 元偏微分方程說起，這類方程具有以下一般形式：

$$k_1(x_1, x_2)D_{x_1}f(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2)D_{x_2}f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0 \quad (1)$$

其中 $k_1(x_1, x_2)$ 和 $k_2(x_1, x_2)$ 是不全為 0 的係數 (如果這兩者都等於 0，那麼 (1) 不成其為微分方程)， $g(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ 則是給定函數。從 (1) 可以得到以下附屬方程(subsidiary equation) (為免數式過於繁冗，以下略去函數 k_1 、 $\dots$ 、 k_m 和 f 的論元 $(x_1, \dots, x_m)$)：

$$\frac{dx_1}{k_1} = \frac{dx_2}{k_2} = \frac{df}{-g(x_1, x_2, f)} \quad (2)$$

上式採用傳統表示導數的方法，用 $\frac{df}{dx_1}$ 代表 $D_{x_1}f$ 等，並把這種表示法中的 df 、 dx_1 等當作分子、分母處理，因此上式可被看成表示以下多個微分方程的簡潔方式：

$$D_{x_1}f = -\frac{g(x_1, x_2, f)}{k_1}, \quad D_{x_2}f = -\frac{g(x_1, x_2, f)}{k_2} \quad (3)$$

$$D_{x_2}x_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad D_{x_1}x_2 = \frac{k_2}{k_1} \quad (4)$$

為求解 (1)，先要選擇保留一個論元 x_i 並消去另一個論元 x_j 。為此，我們可以求解 (4) 中的一個常微分方程，這個方程的通解可寫成以下形式：

$$p(x_i, x_j) = c_1 \quad (5)$$

¹如果把常數看成 0 元函數，並把常微分／差分方程看成 1 元微分／差分方程，那麼可以把以上兩類方程的情況統一表述為： n 階 m 元微分／差分方程的通解一般帶有 n 個任意 $m - 1$ 元函數。

其中 $p(x_i, x_j)$ 代表 x_i 與 x_j 之間的函數關係式， c_1 代表任意常數。現在如從 (5) 解出 x_j 並將之代入 (3) 兩個方程中合適的一個，便可消去論元 x_j ，從而得到一個僅以 x_i 為論元的 1 階常微分方程，這個方程的通解具有以下形式：

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2) \quad (6)$$

其中 q 代表函數關係式， c_2 則代表另一個任意常數。可以證明，(1) 的通解就是

$$f(x_1, x_2) = q(x_i, p(x_i, x_j), h(p(x_i, x_j))) \quad (7)$$

其中 h 代表任意 1 元函數關係。

舉例說，考慮以下偏微分方程：

$$xD_x f(x, y) + D_y f(x, y) + xe^y + f(x, y) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (8)$$

上述方程的附屬方程為

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1} = \frac{df}{-xe^y - f(x, y)} \quad (9)$$

根據前面的討論，設我們選擇保留論元 y 並消去 x ，為此求解以下方程：

$$D_y x = x \quad (10)$$

上式是以 y 為自變項、 x 為因變項的 1 階常係數齊次方程，運用《數學示例：基本解集》中的方法，可得到以下通解：

$$xe^{-y} = c_1 \quad (11)$$

從上式解出 $x = c_1 e^y$ 並將之代入 $D_y f$ ，便可消去 x ，從而得到以下僅以 y 為論元的 1 階常微分方程：

$$Df(y) = -c_1 e^{2y} - f(y) \quad (12)$$

上式是 1 階常係數非齊次方程，運用《數學示例：待定係數法》中的方法，可求得

$$f(y) = c_2 e^{-y} - \frac{1}{3} c_1 e^{2y} \quad (13)$$

由此根據 (7)，可得 (8) 的通解如下：

$$f(x, y) = -\frac{1}{3} x e^y + e^{-y} h(x e^{-y}) \quad (14)$$

讀者請自行驗證，如在開始時選擇保留論元 x ，便要先求解 $D_x y$ ，從而求得 $y - \ln x = c_1$ 。從此式解出 $y = \ln x + c_1$ 並將之代入 $D_x f$ ，便可消去 y ，

從而得到一個僅以 x 為論元的 1 階常微分線性方程 $Df(x) = -e^{c_1}x - \frac{f(x)}{x}$ 。運用《數學示例：積分／和分因子》中的方法，可求得這個方程的解為 $f(x) = -\frac{1}{3}e^{c_1}x^2 + \frac{c_2}{x}$ 。由此根據 (7)，可得 (8) 的另一個通解為 $f(x, y) = -\frac{1}{3}xe^y + \frac{h(y-\ln x)}{x}$ 。²

接下來我們朝兩個方向對以上介紹的偏微分方程作出推廣，第一個方向是推廣為 1 階 m 元偏微分方程，這種方程具有以下一般形式：

$$k_1 D_{x_1} f + \dots + k_m D_{x_m} f + g(x_1, \dots, x_m, f) = 0 \quad (15)$$

類似前面的情況，從 (15) 可以得到以下附屬方程：

$$\frac{dx_1}{k_1} = \dots = \frac{dx_m}{k_m} = \frac{df}{-g(x_1, \dots, x_m, f)} \quad (16)$$

為求解 (15)，先要選擇保留一個論元 x_i 並消去所有其他論元。為此，可以根據 (16) 求解 $m-1$ 個以 x_i 作為自變項的常微分方程，這些方程的通解可寫成以下形式：

$$p_1 = c_1, \dots, p_{i-1} = c_{i-1}, p_{i+1} = c_{i+1}, \dots, p_m = c_m \quad (17)$$

其中 p_j 代表 x_i 與 x_j 之間的函數關係式（這裡不寫出其論元 (x_i, x_j) ）， c_j 代表任意常數。現在如從 (17) 的 $m-1$ 個解中依次解出 x_1 、...、 x_{i-1} 、 x_{i+1} 、...、 x_m 並將之代入 (16) 中合適的方程，便可消去上述論元，從而得到一個僅以 x_i 為論元的 1 階常微分方程，這個方程的通解具有以下形式：

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m, c_{m+1}) \quad (18)$$

其中 q 代表函數關係式， c_{m+1} 代表另一個任意常數。可以證明，(15) 的通解就是

$$f(x_1, \dots, x_m) = q(x_i, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m, h(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m)) \quad (19)$$

其中 h 代表任意 $m-1$ 元函數關係。

舉例說，考慮以下 3 元偏微分方程：

$$D_x f(x, y, z) - D_y f(x, y, z) + D_z f(x, y, z) - x - y - z = 0 \quad (20)$$

² 方程 (8) 的兩個通解只在 $e^{-y}h(xe^{-y})$ 和 $\frac{h(y-\ln x)}{x}$ 這兩個包含任意函數的項上有差異，但這兩項其實是相等的，因為它們可以表示成對方的形式，即 (i) $e^{-y}h(xe^{-y})$ 可以表示成 $\frac{h^*(y-\ln x)}{x}$ ，其中 $h^*(u) = e^{-u}h(e^{-u})$ ；(ii) $\frac{h(y-\ln x)}{x}$ 也可表示成 $e^{-y}h^*(xe^{-y})$ ，其中 $h^*(u) = \frac{h(\ln(u^{-1}))}{u}$ 。

上述方程的附屬方程為

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{1} = \frac{df}{x+y+z} \quad (21)$$

設我們選擇保留論元 x 並消去 y 和 z ，為此依次求解以下方程：

$$D_x y = -1, \quad D_x z = 1 \quad (22)$$

以上兩個方程的通解分別為

$$y + x = c_1, \quad z - x = c_2 \quad (23)$$

容易從以上兩式解出 $y = -x + c_1$ 和 $z = x + c_2$ 並將之代入 $D_x f$ ，便可消去 y 和 z ，從而得到以下僅以 x 為論元的 1 階常微分方程：

$$Df(x) = x + c_1 + c_2 \quad (24)$$

容易求得上述方程的解如下：

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (c_1 + c_2)x + c_3 \quad (25)$$

由此根據 (19)，可得 (20) 的通解如下：

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + x(y + z) + h(y + x, z - x) \quad (26)$$

讀者請自行驗證，如在開始時選擇保留論元 y ，可求得 (20) 的通解為 $f(x, y, z) = -\frac{3}{2}y^2 - y(x + z) + h(x + y, z + y)$ ；如在開始時選擇保留論元 z ，可求得 (20) 的通解為 $f(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 + z(x + y) + h(x - z, y + z)$ ³。

第二個方向是推廣為 n 階 2 元偏微分方程，以下只討論其中的常係數方程，這類方程具有以下一般形式：

$$(k_0 I + k_1 D_{x_1} + k_2 D_{x_2} + k_{11} D_{x_1 x_1} + \dots + k_{2\dots 2} D_{x_2 \dots x_2})f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0 \quad (27)$$

其中 $k_0, \dots, k_{2\dots 2}$ (包含 n 個 2) 是給定的常係數， $g(x_1, x_2)$ 則是給定的函數 (以下稱為「非齊次項」)。以下假設上式中的 n 階算子可以因式分解成

³方程 (20) 的三個通解是相等的，因為 (i) $\frac{1}{2}x^2 + x(y + z) + h(y + x, z - x)$ 可以表示成 $-\frac{3}{2}y^2 - y(x + z) + h^*(x + y, z + y)$ ，其中 $h^*(u, v) = uv + \frac{1}{2}u^2 + h(u, v - u)$ ；(ii) $-\frac{3}{2}y^2 - y(x + z) + h(x + y, z + y)$ 也可以表示成 $\frac{1}{2}z^2 + z(x + y) + h^*(x - z, y + z)$ ，其中 $h^*(u, v) = -uv - \frac{3}{2}v^2 + h(u + v, v)$ ；(iii) $\frac{1}{2}z^2 + z(x + y) + h(x - z, y + z)$ 則可以表示成 $\frac{1}{2}x^2 + x(y + z) + h^*(y + x, z - x)$ ，其中 $h^*(u, v) = uv + \frac{1}{2}v^2 + h(-v, u + v)$ 。

n 個因子之積 (某些因子可能重複出現), 而每個因子所含算子 D 的階最高為 1, 從而把 (27) 改寫成

$$F_1 \times \dots \times F_n f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0 \quad (28)$$

其中 F_1 、...、 F_n 代表上述因子。若 (28) 中的非齊次項等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「齊次方程」), 可用以下方法求解: 就 (28) 中的每個 i ($1 \leq i \leq n$) 求解以下 1 階 2 元偏微分方程:

$$F_i f(x_1, x_2) = 0 \quad (29)$$

以得到前面 (7) 所示的通解。把這 n 個解加起來, 就是 (28) 的通解。如果 (28) 有重複的因子, 便得不到 n 個解。類似常微分方程的情況, 我們可以這樣做: 設 F_i^k 是重複的因子, 其出現次數是 k , 並設求解 (29) 後得到 (7) 所示的通解。可以證明, 在此情況下, 與 F_i^k 相關的解是 (以下略去 f 、 p 、 h_1 、...、 h_k 的論元):

$$f = q(x_i, p, h_1) + x_i q(x_i, p, h_2) + \dots + x_i^{k-1} q(x_i, p, h_k) \quad (30)$$

其中 x_i 是在求解 (29) 時選擇保留的論元, h_1 、...、 h_k 是任意函數, 並且這些任意函數異於 (28) 的其他解中的任意函數, 請注意上式相當於 k 個線性獨立解之和。如果 (28) 中有任何因子涉及虛數單位 i , 在求得 (28) 的通解後, 便要設法去掉 i , 或者對所得通解附加限制條件, 規定 (28) 的解須為實值函數。

舉例說, 考慮以下 2 階齊次偏微分方程 (以下方程等於《數學示例: 方程與解》中的 (3)):

$$(D_{xx} - 2D_{xy} + D_{yy})f(x, y) = 0 \quad (31)$$

上式可以因式分解如下:

$$(D_x - D_y)^2 f(x, y) = 0 \quad (32)$$

上式包含一個出現 2 次的因子 $D_x - D_y$ 。先求解以下 1 階偏微分方程:

$$D_x f(x, y) - D_y f(x, y) = 0 \quad (33)$$

以下是 (33) 的附屬方程:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{df}{0} \quad (34)$$

設我們選擇保留論元 y , 那麼從方程 $D_y x = -1$, 先解得 $x + y = c_1$ 。接著又從方程 $Df(y) = 0$, 可解得 $f(y) = c_2$ 。由此根據 (7), 可得 (33) 的通解為

$$f(x, y) = h(x + y) \quad (35)$$

由於 (32) 沒有其他因子，從 (30) 可直接得到 (31) 的通解如下：

$$f(x, y) = h_1(x + y) + yh_2(x + y) \quad (36)$$

讀者請自行驗證，如在求解 (33) 時選擇保留論元 x ，可求得 (31) 的另一通解為 $f(x, y) = h_1(x + y) + xh_2(x + y)$ ⁴。

若 (28) 中的非齊次項不等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「非齊次方程」)，跟非齊次常微分方程相似，非齊次偏微分方程的通解也由兩部分相加而成，其中一部分是「補助解」(以下記作 $f_c(x_1, x_2)$)，此即相關齊次方程的通解；另一部分則是「特解」(以下記作 $f_p(x_1, x_2)$)。為求 $f_p(x_1, x_2)$ ，可以使用「待定係數法」，其原理跟《數學示例：待定係數法》所介紹的相同，也是根據非齊次項的形式確定一個包含待定係數的 $f_p(x_1, x_2)$ ，並把 $f_p(x_1, x_2)$ 代入 (28)，從而解出這些待定係數。不過，由於非齊次偏微分方程的情況較非齊次常微分方程複雜，我們沒有像上述網頁的「表 1」那樣的表，有時要透過反覆試驗來確定 $f_p(x_1, x_2)$ 的形式。

以下提供一個較簡單的例子：

$$(D_{xx} - 2D_{xy} + D_{yy})f(x, y) - 2 = 0 \quad (37)$$

由於與上式相關的齊次方程是 (31)，(37) 的補助解就是 (36)，以下只需求 (37) 的特解。這裡的非齊次項是 -2 ，我們設定

$$f_p(x, y) = s_1x^2 + s_2xy + s_3y^2 \quad (38)$$

把 (38) 代入 (37) 中的 $f(x, y)$ ，可得到

$$2s_1 - 2s_2 + 2s_3 = 2$$

從上式可得到 $s_2 = s_1 + s_3 - 1$ ，把上述結果代入 (38)，可得

$$\begin{aligned} f_p(x, y) &= s_1x^2 + (s_1 + s_3 - 1)xy + s_3y^2 \\ &= s_1x(x + y) + s_3y(x + y) - xy \\ &= s_1(x + y)^2 + (s_3 - s_1)y(x + y) - xy \end{aligned}$$

我們固然可以上式作為 (37) 的特解，但請注意上式中的 $s_1(x + y)^2 + (s_3 - s_1)y(x + y)$ 可被看成 (36) 中的 $h_1(x + y) + yh_2(x + y)$ 的一個實例 (這裡有 $h_1(z) = s_1z^2$ 和 $h_2(z) = (s_3 - s_1)z$)，因此不妨把 (37) 的特解簡化為

$$f_p(x, y) = -xy \quad (39)$$

⁴方程 (31) 的兩個通解是相等的，因為 (i) $h_1(x + y) + yh_2(x + y)$ 可以表示成 $h_1^*(x + y) + xh_2^*(x + y)$ ，其中 $h_1^*(u) = h_1(u) + uh_2(u)$ 和 $h_2^*(u) = -h_2(u)$ ；(ii) $h_1(x + y) + xh_2(x + y)$ 也可以表示成 $h_1^*(x + y) + yh_2^*(x + y)$ ，其中 $h_1^*(u) = h_1(u) + uh_2(u)$ 和 $h_2^*(u) = -h_2(u)$ 。

把 (37) 的補助解 (即 (36)) 和特解 (即 (39)) 相加, 便可得到 (37) 的通解如下:

$$f(x, y) = h_1(x + y) + yh_2(x + y) - xy \quad (40)$$

接著考慮 2 元偏差分方程, 我們在這裡只集中討論至少有一個論元的階為 1 的方程, 這類方程可寫成以下一般形式:

$$k_1(x_1, x_2)(E_{x_1})^{n_1}f(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2)(E_{x_2})^{n_2}f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0 \quad (41)$$

在上式中, $k_1(x_1, x_2)$ 和 $k_2(x_1, x_2)$ 是不全為 0 的係數, $g(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ 是給定的函數。 n_1 和 n_2 則是非負整數, 其中至少有一個等於 1。上述方程一般不易求解, 但如果在 (41) 中, $n_i = 1$, $E_{x_i}f(x_1, x_2)$ 的係數 $k_i(x_1, x_2)$ 只依賴於論元 x_i (因而可以簡記作 $k_i(x_i)$); 而另一個係數 $k_j(x_1, x_2)$ 是常數 (因而可以簡記作 k_j); 並且函數 g 只依賴於 x_i 和 $f(x_i)$ (因而可以簡記作 $g(x_i, f(x_i))$), 則在此情況下, 可以選擇保留論元 x_i , 並把算子 $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ 當作常數處理, 這等於把上述方程改寫成以下僅包含一個論元 x_i 的 1 階常差分方程:

$$k_i(x_i)E_{x_i}f(x_i) + c_1f(x_i) + g(x_i, f(x_i)) = 0 \quad (42)$$

其中

$$c_1 = k_j(E_{x_j})^{n_j}$$

是常數。假設求得上述方程的通解如下:

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2) \quad (43)$$

其中 q 代表函數關係式, c_2 則代表任意常數。可以證明, 在上述情況下 (42) 的通解就是

$$f(x_1, x_2) = q(x_i, k_j(E_{x_j})^{n_j}, h(x_j)) \quad (44)$$

其中 h 代表任意函數關係。在上述通解中, $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ 應被理解成作用於函數的算子。在進行上述函數作用時, 有時要應用「二項式定理」(binomial theorem)⁵。

舉例說, 考慮以下偏差分方程:

$$xE_{xy}f(x, y) - 4E_{yy}f(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (45)$$

⁵ 「二項式定理」是說, 若 k 是非負整數, 則

$$(x + y)^k = \sum_{n=0}^k C(k, n)x^{k-n}y^n$$

在上述方程中，論元 x 和 y 的階分別為 1 和 2。為方便以下的計算，首先把上式改寫成 (42) 的形式如下 (其方法是代入 $y+1=z$ ，然後又代入 $z=y$)：

$$xE_x f(x, y) - 4(E_y)^2 f(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (46)$$

在上式中， $E_x f(x, y)$ 的係數只依賴於 x ，而另一個係數則是常數，所以我們選擇保留論元 x ，並設定 $c_1 = -4(E_y)^2$ ，這等於把上式改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程：

$$xE_x f(x) + c_1 f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (47)$$

請注意上式具有 (42) 的形式。運用《數學示例：積分／和分因子》中的方法，可求得

$$f(x) = \frac{(-c_1)^{x-1} c_2}{(x-1)!} \quad (48)$$

由此根據 (44)，可得 (46) 的通解如下：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{4(E_y)^2)^{x-1} h(y)}{(x-1)!} \\ &= \frac{4^{x-1}}{(x-1)!} E_y^{2x-2} h(y) \\ &= \frac{4^{x-1}}{(x-1)!} h(2x+y-2) \end{aligned} \quad (49)$$

接下來朝兩個方向對以上介紹的偏差分方程作出推廣，第一個方向是推廣為至少有一個論元的階為 1 的 m 元偏差分方程，這種方程可寫成以下一般形式：

$$k_1(E_{x_1})^{n_1} f + \dots + k_m(E_{x_m})^{n_m} f + g(x_1, \dots, x_m, f) = 0 \quad (50)$$

在 $n_1, \dots, n_m$ 中，至少有一個等於 1。類似前面的情況，上述方程一般不易求解，但如果在 (50) 中， $n_i = 1$ ， $E_{x_i} f$ 的係數 k_i 只依賴於論元 x_i (因而可以簡記作 $k_i(x_i)$)；而所有其他係數都是常數 (因而可以簡記作 $k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_m$)；並且函數 g 只依賴於 x_i 和 $f(x_i)$ (因而可以簡記作 $g(x_i, f(x_i))$)，則在此情況下，可以選擇保留論元 x_i ，並把算子 $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ (其中 $j \neq i$) 當作常數處理，這等於把上述方程改寫成以下僅包含一個變項 x_i 的 1 階常差分方程：

$$k_i(x_i) E_{x_i} f(x_i) + c_1 f(x_i) + g(x_i, f(x_i)) = 0 \quad (51)$$

其中

$$c_1 = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m k_j(E_{x_j})^{n_j} \quad (52)$$

是常數。假設求得以上方程的通解如下：

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2) \quad (53)$$

其中 q 代表函數關係式， c_2 則代表任意常數。可以證明，在上述情況下 (50) 的通解就是

$$f(x_1, \dots, x_m) = q \left(x_i, \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m k_j (E_{x_j})^{n_j}, h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \right) \quad (54)$$

其中 h 代表任意 $m - 1$ 元函數關係。

舉例說，考慮以下 3 元偏差分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (7))：

$$E_x f(x, y, z) - E_y f(x, y, z) - E_z f(x, y, z) = 0 \quad (55)$$

在上述方程中，所有論元的階都是 1，而所有係數都是常數，所以可以保留任何一個論元。假設我們選擇保留 x ，並設定 $c_1 = -E_y - E_z$ ，這等於把上式改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程：

$$E_x f(x) + c_1 f(x) = 0 \quad (56)$$

請注意上式具有 (51) 的形式。解上述方程，可得

$$f(x) = (-c_1)^x c_2 \quad (57)$$

由此根據 (54)，可得 (55) 的通解如下：

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (E_y + E_z)^x h(y, z) \\ &= \sum_{n=0}^x C(x, n) (E_y^{x-n} E_z^n) h(y, z) \\ &= \sum_{n=0}^x C(x, n) h(x + y - n, z + n) \end{aligned} \quad (58)$$

讀者請自行驗證，如在開始時選擇保留論元 y ，可求得 (55) 的通解為 $f(x, y, z) = \sum_{n=0}^y (-1)^n C(y, n) h(x + y - n, z + n)$ ；如在開始時選擇保留論元 z ，可求得 (55) 的通解為 $f(x, y, z) = \sum_{n=0}^z (-1)^n C(z, n) h(x + z - n, y + n)$ 。

第二個方向是推廣為 n 階 2 元偏差分方程，以下只討論其中的常係數方程，這類方程具有以下一般形式：

$$(k_0 I + k_1 E_{x_1} + k_2 E_{x_2} + k_{11} E_{x_1 x_1} + \dots + k_{2\dots 2} E_{x_2 \dots x_2}) f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0 \quad (59)$$

其中 $k_0, \dots, k_{2\dots 2}$ 是給定的常係數， $g(x_1, x_2)$ 則是給定的函數 (即非齊次項)。以下假設上式中的 n 階算子可以因式分解成 n 個因子之積 (某些因子可能重複出現)，而每個因子至少有一個論元的階為 1，從而把 (59) 改寫成

$$G_1 \times \dots \times G_n f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0 \quad (60)$$

其中 $G_1, \dots, G_n$ 代表上述因子。若 (60) 中的非齊次項等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「齊次方程」)，可用以下方法求解：就 (60) 中的每個 i ($1 \leq i \leq n$) 求解以下至少有一個論元的階為 1 的 2 元偏差分方程：

$$G_i f(x_1, x_2) = 0 \quad (61)$$

以得到前面 (44) 所示的通解。把這 n 個解加起來，就是 (60) 的通解。如果 (60) 有重複的因子 G_i^k ，其出現次數是 k ，並設求解 (61) 後得到 (44) 所示的通解，在此情況下，與 G_i^k 相關的解是 (以下略去 $f, h_1, \dots, h_k$ 的論元)：

$$f = q(x_i, k_j(E_{x_j})^{n_j}, h_1) + x_i q(x_i, k_j(E_{x_j})^{n_j}, h_2) + \dots + x_i^{k-1} q(x_i, k_j(E_{x_j})^{n_j}, h_k) \quad (62)$$

其中 x_i 是在求解 (61) 時選擇保留的論元， $h_1, \dots, h_k$ 是任意函數，並且這些任意函數異於 (60) 的其他解中的任意函數。請注意上式相當於 k 個線性獨立解之和。如果 (60) 中有任何因子涉及虛數單位 i ，在求得 (60) 的通解後，便要設法去掉 i ，或者對所得通解附加限制條件，規定 (60) 的解須為實值函數。

舉例說，考慮以下 2 階齊次偏差分方程：

$$((E_x)^2 + 4(E_y)^6) f(x, y) = 0 \quad (63)$$

上式中的算子可以因式分解如下：

$$(E_x - 2i(E_y)^3)((E_x + 2i(E_y)^3) f(x, y) = 0 \quad (64)$$

為求解 (63)，先逐一求解以下至少有一個論元的階為 1 的偏差分方程：

$$E_x f(x, y) - 2i(E_y)^3 f(x, y) = 0 \quad (65)$$

$$E_x f(x, y) + 2i(E_y)^3 f(x, y) = 0 \quad (66)$$

在 (65) 中，論元 x 的階是 1，而兩個係數都是常數，所以我們選擇保留論元 x ，並設定 $c_1 = -2i(E_y)^3$ ，這等於把 (65) 改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程：

$$E_x f(x) + c_1 f(x) = 0, \quad (67)$$

上式是常係數常差分方程，運用《數學示例：基本解集》中的方法，可得到以下通解：

$$f(x) = (-c_1)^x c_2 \quad (68)$$

由此根據 (44)，可得 (65) 的通解如下：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2i(E_y)^3)^x h_1(y) \\ &= (2i)^x h_1(3x + y) \end{aligned} \quad (69)$$

用上述方法，也可求得 (66) 的通解如下：

$$f(x, y) = (-2i)^x h_2(3x + y) \quad (70)$$

把 (69) 和 (70) 相加，便得到 (63) 的通解如下：

$$f(x, y) = (2i)^x h_1(3x + y) + (-2i)^x h_2(3x + y) \quad (71)$$

可是，上式包含虛數單位 i ，要設法去掉它。為此，先把 $\pm 2i$ 改寫成 $2(\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2})$ ，由此根據「棣美弗定理」(de Moivre's Theorem)⁶，可以把 (71) 改寫成下式：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2^x \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) h_1(3x + y) \\ &\quad + 2^x \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) h_2(3x + y) \end{aligned} \quad (72)$$

由於 $h_1(3x + y)$ 和 $h_2(3x + y)$ 是任意函數， $h_3(3x + y) = \frac{1}{2}h_1(3x + y) - \frac{i}{2}h_2(3x + y)$ 和 $h_4(3x + y) = \frac{1}{2}h_1(3x + y) + \frac{i}{2}h_2(3x + y)$ 也是任意函數，因此用 h_3 和 h_4 分別代替 (72) 中的 h_1 和 h_2 ，得到的以下結果必然也是 (63) 的通解：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2^x \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2}h_1(3x + y) - \frac{i}{2}h_2(3x + y) \right) \\ &\quad + 2^x \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2}h_1(3x + y) + \frac{i}{2}h_2(3x + y) \right) \\ &= 2^x \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) h_1(3x + y) + 2^x \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) h_2(3x + y) \end{aligned} \quad (73)$$

因此我們使用 (73) 作為 (63) 的通解，請注意這個通解不含虛數單位 i 。

若 (60) 中的非齊次項不等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「非齊次方程」)，則有關方程的通解也由「補助解」(以下記作 $f_c(x_1, x_2)$) 和「特

⁶該定理是說，若 x 是整數，則 $(r(\cos \theta \pm i \sin \theta))^x = r^x(\cos(\theta x) \pm i \sin(\theta x))$ 。

解」(以下記作 $f_p(x_1, x_2)$) 相加而成。為求 $f_p(x_1, x_2)$ ，同樣可以使用「待定係數法」，以下提供一個較簡單的例子：

$$((E_x)^2 + 4(E_y)^6)f(x, y) - 5x - 10y = 0 \quad (74)$$

由於與上式相關的齊次方程是 (63)，(74) 的補助解就是 (73)，以下只需求 (74) 的特解。這裡的非齊次項是 $-5x - 10y$ ，因此可以設定

$$f_p(x, y) = s_1x + s_2y + s_3 \quad (75)$$

把 (75) 代入 (74) 中的 $f(x, y)$ ，可得到

$$s_1x + 2s_1 + s_2y + s_3 + 4s_1x + 4s_2y + 24s_2 + 4s_3 - 5x - 10y = 0$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} 5s_1 = 5 \\ 5s_2 = 10 \\ 2s_1 + 24s_2 + 5s_3 = 0 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = -10$ ，把上述結果代入 (75)，可得

$$f_p(x, y) = x + 2y - 10 \quad (76)$$

把 (74) 的補助解 (即 (73)) 和特解 (即 (76)) 相加，便可得到 (74) 的通解如下：

$$f(x, y) = 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) h_1(3x+y) + 2^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) h_2(3x+y) + x + 2y - 10 \quad (77)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁