數學示例：緊致性

「緊致性」是拓樸學重點研究的另一種拓樸性質，為定義此一性質，須先引入「覆蓋」的概念。設 X 為拓樸空間，$\mathcal{S}$ 為 X 的某些子集組成的集合。如果

$$\bigcup \mathcal{S} = X$$

即對於 X 的任何元素 x，都有 $\mathcal{S}$ 中某個成員 S，使得 $x \in S$，則 $\mathcal{S}$ 稱為 X 的覆蓋(cover)，請注意上述定義沒有規定 $\mathcal{S}$ 中的成員必須兩兩互斥。如果 $\mathcal{S}$ 中每個成員都是 X 上的開集，則 $\mathcal{S}$ 稱為 X 的開覆蓋(open cover)。如果 $\mathcal{S}$' 是 $\mathcal{S}$ 的子集，並且 $\mathcal{S}$' 也是 X 的覆蓋，則 $\mathcal{S}$' 稱為 $\mathcal{S}$ 的子覆蓋(subcover)。請注意任何覆蓋 $\mathcal{S}$ 都是自身的子覆蓋。

以拓樸空間 $\mathbb{R}$ 為例，以下是它的一個覆蓋：

$$\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty)\}$$

容易看到 $\mathcal{S}_1$ 中的每個成員都是 $\mathbb{R}$ 的子集，而且 $\mathbb{R}$ 中任何元素都是 $\mathcal{S}_1$ 中某個成員的元素，因此 $\mathcal{S}_1$ 確是 $\mathbb{R}$ 的一個覆蓋。不過，由於 $\mathcal{S}_1$ 中有一個成員 $\{0\}$ 不是開集，所以它不是開覆蓋。以下則是 $\mathbb{R}$ 的一個開覆蓋：

$$\mathcal{S}_2 = \left\{(-\infty, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), (0, \infty)\right\} \qquad (1)$$

$\mathcal{S}_2$ 的以下子集也是 $\mathbb{R}$ 的覆蓋，因此以下集合是 $\mathcal{S}_2$ 的子覆蓋：

$$\mathcal{S}_3 = \left\{(-\infty, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, \infty)\right\} \qquad (2)$$

設 X 為拓樸空間，如果 X 的任何一個開覆蓋 $\mathcal{S}$ 都有至少一個「有限子覆蓋」(finite subcover) $\mathcal{S}$'，即 $\mathcal{S}$' 是 $\mathcal{S}$ 的子覆蓋，並且 $\mathcal{S}$' 包括有限個成員，我們便說 X 是緊致(亦譯作「緊」)(compact) 的。

根據上述定義，任何包括有限個元素的拓樸空間都是緊致的，這是因為如果 X 包括 n 個元素，那麼根據集合論，X 共有 2^n 個子集，這即是說 X

的任何覆蓋都只有有限個成員，因此 X 的任何開覆蓋 $\mathcal{S}$ 都必然有至少一個有限子覆蓋，例如 $\mathcal{S}$ 自身就是 $\mathcal{S}$ 的有限子覆蓋。

上述定義的關鍵在於 X 的「任何」開覆蓋都有有限子覆蓋，因此不能僅憑 X 的某個開覆蓋有有限子覆蓋而斷定 X 是緊致的。但反過來，卻可以僅憑 X 的某個開覆蓋沒有有限子覆蓋而斷定 X 不是緊致的。以前面討論過的 $\mathbb{R}$ 為例，不能因為 $\mathbb{R}$ 的開覆蓋 $\mathcal{S}_2$ (見 (1)) 有有限子覆蓋 $\mathcal{S}_3$ (見 (2)) 便說 $\mathbb{R}$ 是緊致的。事實上，$\mathbb{R}$ 不是緊致的。為證明這一點，考慮以下包括無窮多個成員的開覆蓋：

$$\mathcal{S}_4 = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

上述覆蓋由 $(-2, 0)$、$(-1, 1)$、$(0, 2)$ 等開區間組成，這些開區間雖然有大量重疊之處，但每個整數都只屬於一個開區間，例如 0 便只屬於 $(-1, 1)$，因此如把上述覆蓋中的任何一個成員剔除，餘下的成員便不能覆蓋 $\mathbb{R}$。由此可知 $\mathcal{S}_4$ 沒有有限子覆蓋，因此 $\mathbb{R}$ 不是緊致的。

接下來讓我們證明開區間 $(0, 1)$ 不是緊致的，為此，考慮以下開覆蓋：

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \right\}$$

上述覆蓋由 $(\frac{1}{2}, 1)$、$(\frac{1}{3}, 1)$、$(\frac{1}{4}, 1)$ 等開區間組成。若 $\mathcal{S}_6$ 是 $\mathcal{S}_5$ 的包括 k 個成員的有限子集，那麼 $\mathcal{S}_6$ 具有以下形式：

$$\mathcal{S}_6 = \left\{ \left(\frac{1}{n_1}, 1 \right), \ldots, \left(\frac{1}{n_k}, 1 \right) \right\}$$

其中 n_1、...、n_k 是大於 1 的整數。設 n_i 為這 k 個整數中的最大者，那麼我們有

$$\bigcup \mathcal{S}_6 = \left(\frac{1}{n_i}, 1 \right)$$

上述集合顯然不等於 $(0, 1)$，因為對於任何大於 n_i 的整數 n_j，都有 $\frac{1}{n_j} \in (0, 1)$ 但 $\frac{1}{n_j} \notin (\frac{1}{n_i}, 1)$。換句話說，$\mathcal{S}_6$ 並不覆蓋 $(0, 1)$。至此證得 $\mathcal{S}_5$ 的任何有限子集都不覆蓋 $(0, 1)$，因此 $\mathcal{S}_5$ 沒有有限子覆蓋，即 $(0, 1)$ 不是緊致的。

上述例子顯示，如要證明 X 不是緊致的，只需找出 X 的一個開覆蓋，並且證明這個開覆蓋沒有有限子覆蓋。反之，如要根據前面的定義直接證明 X 是緊致的，便要考慮 X 的所有開覆蓋，似乎較為困難。但幸好對於 $\mathbb{R}^n$ 的子空間而言，我們有以下定理。

定理 1 (海涅-博雷爾定理Heine-Borel Theorem)：設 X 為 $\mathbb{R}^n$ 的子空間，則 X 是緊致的當且僅當 X 是有界的並且是 $\mathbb{R}^n$ 上的閉集。

在上述定理中，X「有界」(bounded) 是指存在一個 $x \in \mathbb{R}^n$ 和一個實數 r，使得 $X \subseteq B(x, r)$，其中 $B(x, r)$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 上以 x 為中心，半徑為 r 的開球。

根據上述定理，由於閉區間 $[0, 1]$ 是有界的並且是 $\mathbb{R}$ 上的閉集，可知 $[0, 1]$ 是緊致的。我們也可以運用上述定理來驗證前面得到的結果。舉例說，由於 $\mathbb{R}$ 是無界的，而開區間 $(0, 1)$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的閉集，可知 $\mathbb{R}$ 和 $(0, 1)$ 都不是緊致的，這與前面得到的結果吻合。

綜合運用拓樸學上的其他結果，還可以推導出更多結果。舉例說，我們在《數學示例：開集與閉集》中曾經指出，如果 S 是拓樸空間 X 的子集，那麼 S 的邊界 $\mathrm{Bd}(S)$ 是 X 上的閉集。現在考慮 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $B((0, 0), 1)$，這是以原點 $(0, 0)$ 為圓心，半徑為 1 的開圓盤。由於以原點為圓心，半徑為 1 的圓邊 S^1 是這個開圓盤的邊界，可知 S^1 是 $\mathbb{R}^2$ 上的閉集。此外，由於 $S^1 \subseteq B((0, 0), 2)$，$S^1$ 是有界的，由此根據「定理 1」，可知 S^1 是緊致的。

緊致性在拓樸學中的重要性在於此一性質是連續函數下的不變性質，這是以下定理的內容。

定理 2：設 X 和 Y 為拓樸空間，$f : X \to Y$ 為連續函數，若 X 是緊致的，則 $f(X)$ 也是緊致的。

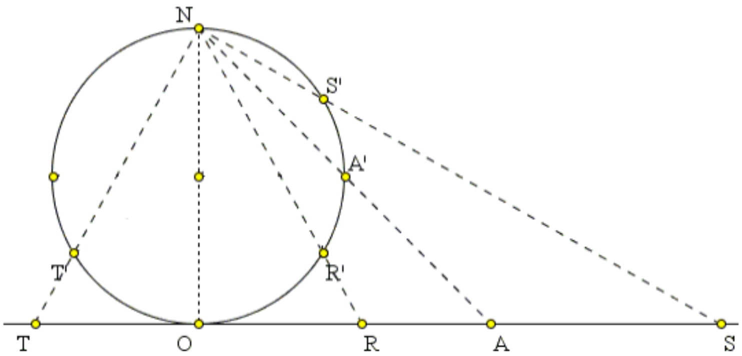
根據《數學示例：連續函數與同胚》中的定義，若一一到上函數 f 及其逆函數 f^{-1} 都是連續函數，則 f 是同胚，由此從上述定理可以推得以下定理。

定理 3：若 $f : X \to Y$ 是同胚，那麼 X 是緊致的當且僅當 Y 是緊致的。

由此可見，緊致性是同胚空間共有的性質，即拓樸性質。舉例說，我們在上面論證了開區間 $(0, 1)$ 不是緊致的，而閉區間 $[0, 1]$ 則是緊致的，因此根據上述定理，$(0, 1) \ncong [0, 1]$。另一方面，我們在上述網頁也論證了 $\mathbb{R}$ 與任何開區間同胚，故有 $(0, 1) \cong \mathbb{R}$。至此我們看到拓樸學上的一個奇特現象：$(0, 1)$ 與 $[0, 1]$ 雖然非常接近 (前面僅比後者少了兩點)，但兩者不同胚；$(0, 1)$ 與 $\mathbb{R}$ 相差甚大 (前者有界，後者無界)，兩者反而同胚。

對於不緊致的空間來說，有時可以透過某些操作把該空間變成緊致空間，這種操作稱為緊化(compactification)。在某些特殊情況下，可以透過在該空間上加入一點而使之緊化，這種操作就稱為單點緊化(one-point compactification)。如前所述，$\mathbb{R}$ 不是緊致的，但如果把一個「無窮遠點」(point at infinity) (以下記作 ∞) 加到 $\mathbb{R}$ 中，所得的空間 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 便同胚於 S^1，而我們在前面論證了 S^1 是緊致的，因此 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 是對 $\mathbb{R}$ 進行單點緊化的結果。

以下用幾何學上的「球極平面投射」(stereographic projection) 來直觀地解釋 $S^1 \cong \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 此一同胚關係，下圖展示這種投影：



上圖的底部有一條代表 $\mathbb{R}$ 的直線，其上有一個圓邊 S^1，其中 N 點代表 S^1 的「北極」，O 代表「南極」，也代表 $\mathbb{R}$ 上 0 這一點。上圖顯示，從 N 可以發出一條射線把 S^1 上每個異於 N 的點投射到 $\mathbb{R}$ 上的唯一一點，例如在上圖，S'、A'、R' 和 T' 便被分別投射到 S、A、R 和 T 上，而 O 則被投射到其自身 (因為 O 既在 S^1 上又在 $\mathbb{R}$ 上)。由此可見，$S^1-\{N\} \cong \mathbb{R}$。

接著考慮 N 這點，設 X 為 S^1 上的點。可以看到，隨著 X 從左或右邊越來越接近 N，從 N 到 X 的射線越來越接近一條平行於 $\mathbb{R}$ 的直線，而 X 的投影也離開 O 越來越遠。因此直觀地看，可以把 N 這點的投影看成無窮遠點 ∞。請注意 $\mathbb{R}$ 本來是向左右兩端無限延伸的直線，但 ∞ 這點把 $\mathbb{R}$ 的左右兩端連接起來，這樣 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 便相當於一條閉合曲線，因而與 S^1 同胚。

上述直觀討論也可嚴格地表述為以下公式 (以下假設 S^1 圓心的坐標是 $(0,1)$，這即是說 S^1 上的點 (x,y) 滿足 $x^2+(y-1)^2=1$)：

$$f(x,y)=\frac{2x}{2-y} \qquad (3)$$

$$g(n)=\left(\frac{4n}{n^2+4},\frac{2n^2}{n^2+4}\right) \qquad (4)$$

公式 (3) 用來把 S^1 上的點 (x,y) 映射為 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上的點，公式 (4) 則反過來把 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上的點 n 映射為 S^1 上的點。讀者可自行驗證，這兩條公式能得出正確的結果。此外，它們都是連續函數，而且互為逆函數，因此這兩

個函數就是 S^1 與 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 之間的同胚。

與「緊致性」密切相關的還有另外兩個概念，第一個相關概念是「極限點緊致性」。設 X 為拓樸空間，若 X 的每個無窮子集都在 X 上有極限點，我們便說 X 是極限點緊致(limit point compact) 的。此一定義使用了「極限點」的概念，根據《數學示例：開集與閉集》，X 的元素 x 是集合 S 的極限點，若 X 上任何包括 x 的開集都與 S 相交於至少一個有別於 x 的元素 y。

舉例說，$\mathbb{R}$ 不是極限點緊致的，為證明這一點，考慮以下集合

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad (5)$$

上述集合是 $\mathbb{R}$ 的無窮子集，讀者可自行驗證，上述集合在 $\mathbb{R}$ 上沒有極限點。另外又如開區間 $(0, 1)$ 也不是極限點緊致的，為證明這一點，考慮以下集合

$$S_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} \qquad (6)$$

上述集合是 $(0, 1)$ 的無窮子集，讀者可自行驗證，上述集合在 $(0, 1)$ 上沒有極限點[1]。

跟「緊致性」的情況相似，如要證明拓樸空間 X 是極限點緊致的，有時可以無需考慮 X 的所有無窮子集，而只需借助某些定理，例如以下定理。

定理 4：設 X 為拓樸空間，若 X 是緊致的，則 X 也是極限點緊致的。

利用上述定理，可以推導出以下與「定理 1」對應的定理。

定理 5：設 X 為 $\mathbb{R}^n$ 的子空間，則 X 是極限點緊致的當且僅當 X 是有界的並且是 $\mathbb{R}^n$ 上的閉集。

根據上述定理，可知 $[0, 1]$ 是極限點緊致的。接下來讓我們證明上述定理。首先，根據「定理 1」，若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集，那麼 X 是緊致的。由此再根據「定理 4」，可知 X 也是極限點緊致的。其次，我們用兩個反例證明如果 X 不是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集，那麼 X 的無窮子集便不一定在 X 上有極限點。第一個反例是 $\mathbb{R}$，這是一個無界集合。我們在前面已指出，$\mathbb{R}$ 有一個無窮子集 S_1 (見 (5)) 在 $\mathbb{R}$ 上沒有極限點。第二個反例則是 $(0, 1)$，這不是 $\mathbb{R}$ 上的閉集。我們在前面也已指出，$(0, 1)$ 有一個無窮子集 S_2 (見 (6)) 在 $(0, 1)$ 上沒有極限點。

[1]請注意 0 在 $\mathbb{R}$ 上是 S_2 的極限點，但在 $(0, 1)$ 上卻不是 S_2 的極限點，因為 $0 \notin (0, 1)$。

第二個相關概念是「序列緊致性」。設 X 為拓樸空間，若任何由 X 的元素組成的序列都有收斂於 X 的子序列，我們便說 X 是序列緊致(sequentially compact) 的。上述定義使用了「序列」(sequence)、「子序列」(subsequence) 和「收斂」(convergent) 等概念。簡言之，序列是指由可數無窮多個 (可相同的) 項組成的有序結構，例如

$$s_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, n+1, \ldots) \qquad (7)$$

$$s_2 = \left(1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\right) \qquad (8)$$

子序列則是指由某個序列中抽取可數無窮多個項出來組成的另一序列 (每一個項只可抽取一次，抽取時須保存這些項原來的先後次序)，例如若從 (8) 中抽取其第 2、4、6、... 項，便可得到以下子序列：

$$s_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \qquad (9)$$

如果某序列的項最終與 X 中某個確定的值 x 無限接近，我們便說這個序列收斂於 X 或者以 x 為「極限」(limit)(如果 X 根據上下文不言而喻，那麼「收斂於 X」也可簡化為「收斂」)。

舉例說，容易看到序列 (7) 及其任何子序列都不收斂 (因為其項的值不斷遞增)；序列 (8) 也不收斂 (因為其項的值不斷交替遞增和遞減)，但它卻有一個以 0 為極限的收斂子序列 (即 (9))。上述例子顯示，$\mathbb{R}$ 中有些序列 (例如 (7)) 沒有收斂的子序列，因此 $\mathbb{R}$ 不是序列緊致的。

跟緊致性的情況相似，如要根據前面的定義直接證明 X 是序列緊致的，便要考慮由 X 的元素組成的所有序列，這似乎頗為困難。但幸好對於 $\mathbb{R}^n$ 的子空間而言，我們有一個簡單的證明方法，這個方法依賴於數學分析中的以下兩條定理 (在以下定理中，「有界序列」是指所有項均來自一個有界集的序列)。

定理 6 (波爾查諾-魏爾施特拉斯定理Bolzano-Weierstrass Theorem)：任何由 $\mathbb{R}^n$ 的元素組成的有界序列都有收斂於 $\mathbb{R}^n$ 的子序列。

定理 7：設 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，則 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的閉集當且僅當任何由 X 的元素組成的收斂序列的極限都屬於 X。

綜合以上兩條定理，可以推導出以下定理。

定理 8：設 X 為 $\mathbb{R}^n$ 的子空間，則 X 是序列緊致的當且僅當 X 是有

界的並且是 $\mathbb{R}^n$ 上的閉集。

根據上述定理，可知 $[0,1]$ 是序列緊致的。接下來讓我們證明上述定理。首先，假設 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集，並設 s 為由 X 的元素組成的序列。請注意 s 是由 $\mathbb{R}^n$ 的元素組成的有界序列，由此根據「定理 6」，可知 s 必有收斂於 $\mathbb{R}^n$ 的子序列 s'。由於 s' 是由閉集 X 的元素組成的收斂序列，由此根據「定理 7」，可知 s' 的極限必屬於 X，即 s' 收斂於 X。至此證得任何由 X 的元素組成的序列都有收斂於 X 的子序列，因此 X 是序列緊致的。

其次，我們用兩個反例證明如果 X 不是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集，那麼由 X 的元素組成的序列便不一定有收斂於 X 的子序列。第一個反例是 $\mathbb{R}$，這是一個無界集合。我們在前面已指出，由 $\mathbb{R}$ 的元素組成的序列 s_1 (見 (7)) 沒有收斂於 $\mathbb{R}$ 的子序列。第二個反例則是 $(0,1]$，這不是 $\mathbb{R}$ 上的閉集。前面的序列 s_3 (見 (9)) 可看成由 $(0,1]$ 的元素組成的序列，請注意這個序列的任何子序列都以 0 作為極限，但由於 $0 \notin (0,1]$，這個序列沒有收斂於 $(0,1]$ 的子序列。

比較「定理 1」、「定理 5」和「定理 8」，可以看到 $\mathbb{R}^n$ 的子空間 X 是緊致、極限點緊致和序列緊致的當且僅當 X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界閉集。換句話說，在 $\mathbb{R}^n$ 上，本文介紹的三個概念：「緊致性」、「極限點緊致性」和「序列緊致性」是等價概念，這就是這三個概念的名稱都包含「緊致」一詞的根本原因。上述三個概念的等價性可以推廣到一般距離空間，這是以下定理的內容。

定理 9：設 X 為距離空間，則 X 是緊致的，當且僅當 X 是極限點緊致的，當且僅當 X 是序列緊致的。

我們在《數學示例：距離空間》中介紹了「距離空間」的概念，這是指一個集合 X 連同其上的距離函數 d 所形成的數學結構，而 d 須滿足一系列公理。由於 $\mathbb{R}^n$ 是距離空間[2]，故滿足上述定理，這就是為何我們有「定理 1」、「定理 5」和「定理 8」所示的對應結果。

惟請注意，上述定理僅適用於距離空間。我們在《數學示例：拓樸空間》中曾指出，給定距離空間 (X,d)，可以得到一個拓樸空間 $(X,\mathcal{T}_d)$，其中 $\mathcal{T}_d$ 包括 X 上任意多個開球的并集，因此距離空間是拓樸空間的一個子類。對於一般的拓樸空間而言，「緊致性」、「極限點緊致性」和「序列緊致性」並非等價概念，即存在一些具有這三者中某種性質但不具有另一種性質的拓樸空間。由於這些例子中有很多都涉及頗複雜的概念，以下只提供一個極限

[2]在 $\mathbb{R}^n$ 上，我們可以定義以下距離函數：

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

可以證明上面定義的 d 滿足距離函數的公理。

點緊致但卻不緊致的空間的例子。

考慮拓樸空間 $(\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\},\mathcal{T}_1)$，其中 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 包括所有形如 $(n,\spadesuit)$ 或 $(n,\heartsuit)$ (其中 $n\in\mathbb{N}$) 的有序對，而 $\mathcal{T}_1$ 則是由以下拓樸基生成的拓樸[3]：

$$\mathcal{B}_1=\{\{(1,\spadesuit),(1,\heartsuit)\},\{(2,\spadesuit),(2,\heartsuit)\},\{(3,\spadesuit),(3,\heartsuit)\},\ldots\} \tag{10}$$

根據《數學示例：拓樸空間》中對拓樸基的介紹，上述空間下的開集是 $\mathcal{B}_1$ 中任意多個成員的并集。請注意 $\mathcal{B}_1$ 中的每個成員都包括兩個元素 $(n,\spadesuit)$ 和 $(n,\heartsuit)$，因此對任何自然數 n 和任何開集 U 而言，要麼 $(n,\spadesuit)$ 和 $(n,\heartsuit)$ 兩者都是 U 的成員，要麼 $(n,\spadesuit)$ 和 $(n,\heartsuit)$ 兩者都不是 U 的成員。

接著證明上述空間確有所述的性質。首先，設 S_3 為 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 的任意非空子集，那麼 S_3 包括至少一個形如 $(n,\spadesuit)$ 或 $(n,\heartsuit)$ 的元素。如果 $(n,\spadesuit)\in S_3$，則 $(n,\heartsuit)$ 就是 S_3 的一個極限點，現證明如下：設 U_1 是包括 $(n,\heartsuit)$ 的開集，那麼根據上段的討論，U_1 必然也包括 $(n,\spadesuit)$，這樣 U_1 便與 S_3 相交於一個有別於 $(n,\heartsuit)$ 的元素 (即 $(n,\spadesuit)$)，由此可知 $(n,\heartsuit)$ 是 S_3 的極限點。同理，如果 $(n,\heartsuit)\in S_3$，則 $(n,\spadesuit)$ 就是 S_3 的一個極限點。至此證明了 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 的任意非空子集 (不論是否無窮) 都有極限點，所以 $(\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\},\mathcal{T}_1)$ 是極限點緊致的。

其次，$(\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\},\mathcal{T}_1)$ 不是緊致的。為證明這一點，請注意前面的 $\mathcal{B}_1$ (見 (10)) 構成 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 的一個開覆蓋，這是因為對於 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 的任何元素 $(n,\spadesuit)$ 或 $(n,\heartsuit)$，都有 $\mathcal{B}_1$ 中的成員 $\{(n,\spadesuit),(n,\heartsuit)\}$ 包括這個元素，而且 $\mathcal{B}_1$ 中每個成員都是 $(\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\},\mathcal{T}_1)$ 上的開集。此外，$\mathcal{B}_1$ 的任何有限子集都不可能覆蓋 $\mathbb{N}\times\{\spadesuit,\heartsuit\}$，這是因為有無窮多個 $\{(n,\spadesuit),(n,\heartsuit)\}$ 不在這個有限子集內，因此 $\mathcal{B}_1$ 沒有有限子覆蓋。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[3]請注意以下拓樸基也可寫成以下形式：

$$\mathcal{B}_1=\{B_1\times B_2: B_1\in\{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\}\wedge B_2\in\{\{\spadesuit,\heartsuit\}\}\}$$

以符合我們在《數學示例：積拓樸與商拓樸》「定理 1」中提出的積空間拓樸基的形式。讀者可自行驗證，$\{\{1\},\{2\},\{3\},\ldots\}$ 和 $\{\{\spadesuit,\heartsuit\}\}$ 分別構成 $\mathbb{N}$ 和 $\{\spadesuit,\heartsuit\}$ 的一個拓樸基。