數學示例：完備空間

我們在《數學示例：距離空間》中介紹了距離空間的概念，也介紹了距離空間的某些子類－序列空間、函數空間等，這些子類的定義都是建基於空間中元素的類型，例如序列空間中的元素是序列，函數空間中的元素則是函數等等。除了這種簡單分類法外，還可以根據距離空間的一個重要性質－完備性(completeness)，把距離空間分為完備空間(complete space) 和不完備空間(incomplete space) 這兩大類，本章主旨就是闡釋「完備性」此一概念。

要了解完備性，先要了解若干個與「序列」(sequence) 相關的概念。以下是序列的典型例子：

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right) \qquad (1)$$

$$(2, 4, 8, 16, \ldots) \qquad (2)$$

$$(1, -1, 1, -1, \ldots) \qquad (3)$$

上列各個例子也可抽象地表示成

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

由此可見序列的特點是包含 (可數) 無限多個「項」(term)。一般地，可以把序列表達為 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的形式。如果某序列的每一項都可用公式 $f(n)$ 表達出來，那麼更可以把該序列寫成 $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ 的形式，例如上面的 (1) 便可以寫成 $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$。

與序列相關的一個重要概念是序列的斂散性(convergence)，如果一個序列的項 x_n 最終趨向一個確定的 (有限) 值 x，我們便說該序列是「收斂」(convergent) 的，並把 x 稱為這個序列的極限(limit)，否則它就是「發散」(divergent) 的。直觀地看，上面 (1) 中的項越來越小，最終會趨向 0 這個極限，所以這個序列是收斂的；(2) 中的項則越來越大，最終並不趨向任何確定的值，所以這個序列是發散的；(3) 中的項雖然只取兩個有限值，但由於這個序列最終並不趨向任何一個值，所以它也是發散的。

由於在上述定義中，「x_n 最終趨向 x」此一表述方式帶有模糊性，在數學分析中一般採用以下較嚴格的表述方式以作為序列極限的定義：設 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 為序列，如果給定任何大於 0 的實數 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $n > N$，則必有 $|x_n - x| < \epsilon$，我們便說 x 是序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的極限，也可說 x_n 趨向於 x，記作 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$。舉例說，在上面 (1) 中，假設給定 $\epsilon = 0.01$，那麼只要設定 $N = 6$，便有若 $n > 6$，則 $|\frac{1}{2^n} - 0| < 0.01$。事實上，可以證明給定任何大於 0 的 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $n > N$，則 $|\frac{1}{2^n} - 0| < \epsilon$，因此確有 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$。

採用上述極限定義還有另一個好處，就是可以把它推廣到一般距離空間，只要把上述定義中的 $|x_n - x|$ 改為 $d(x_n, x)$ 便可，其中 d 代表距離空間中的距離函數，並規定序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 中的每一項 x_n 以及極限 x 都是有關距離空間中的元素。此外，不難看到「x_n 趨向於 x」等價於「x_n 與 x 的距離趨向於 0」, 用數式表達就是 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 當且僅當 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$。

以下讓我們用 l^{∞} 中的一個序列為例以作說明，回顧《數學示例：距離空間》，l^{∞} 是由有界序列組成的空間，其距離函數如下：

$$d_1((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \qquad (4)$$

以下是 l^{∞} 中的一個序列 (即由序列組成的序列)：

$$\left(\left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{2k}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{3k}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{4k}\right)_{k=1}^{\infty}, \ldots\right) \qquad (5)$$

上述序列的每一項都是有界序列，而且這些有界序列中的每一個都是以 0 為極限的序列，因此上述序列也是收斂的，其極限就是 $(0)_{k=1}^{\infty}$，即每一項都是 0 的序列。為證明這一點，我們首先觀察到對任何正整數 n [1]，都有

$$\begin{aligned} d_1\left(\left(\frac{1}{nk}\right)_{k=1}^{\infty}, (0)_{k=1}^{\infty}\right) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{nk} - 0\right| \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

上述結果顯示，(5) 中的項 $(\frac{1}{nk})_{k=1}^{\infty}$ 與 $(0)_{k=1}^{\infty}$ 的距離隨著 n 增大而不斷減小，因此可以證明給定任何大於 0 的 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $n > N$，則 $d_1((\frac{1}{nk})_{k=1}^{\infty}, (0)_{k=1}^{\infty}) < \epsilon$，這即是說 $(0)_{k=1}^{\infty}$ 是 (5) 的極限。

接著引入柯西序列(Cauchy sequence) 的概念。設 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 為某個距離空

[1]請注意 (5) 可以表達為 $((\frac{1}{nk})_{k=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$，由於這是一個由無限多個小序列組成的大序列，所以包含兩個變項 k 和 n，其中 k 是小序列的變項，n 則是大序列的變項。

間 (以 d 作為距離函數) 中的序列，如果給定任何大於 0 的實數 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $m, n > N$，則必有 $d(x_m, x_n) < \epsilon$，那麼我們便說該序列是柯西序列 (亦稱「基本序列」fundamental sequence)。請注意柯西序列與收斂序列的不同之處，柯西序列中的項 x_m 與 x_n 會隨著 m、n 增大而不斷縮小距離，這裡的 x_m 與 x_n 是不斷變化的；而收斂序列中的項 x_n 則會隨著 n 增大而與某個極限 x 不斷縮小距離，這裡只有 x_n 變化，而 x 則是固定的。

舉例說，在上面 (1) 中，假設給定 $\epsilon = 0.01$，那麼只要設定 $N = 5$，便有若 $m, n > 5$，則 $|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}| < 0.01$。事實上，可以證明給定任何大於 0 的 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $m, n > N$，則 $|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}| < \epsilon$，因此 (1) 是柯西序列。

直觀地看，(5) 也是柯西序列。為證明這一點，我們首先觀察到對任何正整數 m 和 n，都有

$$
\begin{aligned}
d_1\left(\left(\frac{1}{mk}\right)_{k=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{nk}\right)_{k=1}^{\infty}\right) &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{mk} - \frac{1}{nk}\right| \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{k} \times \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|\right) \\
&= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|
\end{aligned}
$$

上述結果顯示，(5) 中的項 $(\frac{1}{mk})_{k=1}^{\infty}$ 與 $(\frac{1}{nk})_{k=1}^{\infty}$ 的距離隨著 m 和 n 增大而不斷減小，因此可以證明給定任何大於 0 的 ϵ，都總能找到一個正整數 N, 使得若 $m, n > N$, 則 $d_1((\frac{1}{mk})_{k=1}^{\infty}, (\frac{1}{nk})_{k=1}^{\infty}) < \epsilon$, 這即是說 (5) 是柯西序列。

對於收斂序列與柯西序列之間的關係，我們有以下重要定理。

定理 1：在任何距離空間中，任何收斂序列都是柯西序列。

上述定理的逆命題並不成立，即存在距離空間，其中某些柯西序列並非收斂序列 (例子見下)。由此可以作出如下定義，如果在某距離空間中，任何柯西序列都是收斂序列，則該距離空間稱為「完備空間」，否則稱為「不完備空間」。我們在《數學示例：賦範空間》和《數學示例：內積空間》中指出了賦範空間和內積空間都是距離空間的特例，因此完備空間的概念也適用於這些空間。在泛函分析中，這些完備空間有特別的名稱，其中完備的賦範空間稱為巴拿赫空間(Banach space)，完備的內積空間則稱為希爾伯特空間(Hilbert space)。

可以證明，我們所熟悉的距離空間 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 都是完備空間。事實上，

在數學分析中，我們可以使用以下定理判定序列的斂散性。

定理 2：一個實數或複數序列是收斂的當且僅當該序列是柯西序列。

上述定理也可以表述為，在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 中，收斂序列 $\Leftrightarrow$ 柯西序列，而此一等價式之所以成立，是因為 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 是完備空間。對於不完備空間而言，「收斂序列 $\Leftrightarrow$ 柯西序列」此一等價式並不成立。此外，由於 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 是賦範空間和內積空間，因此它們也是巴拿赫空間和希爾伯特空間。

除了 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 外，我們在《數學示例：距離空間》中討論過的序列空間 l^∞、l^p (其中 $p \geq 1$) 以及函數空間 $(C[a,b], d_2)$ (其中 $d_2(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$) 也是完備的。由於上述空間也是賦範空間，所以它們也是巴拿赫空間；但由於其中只有 l^2 才是內積空間，所以只有 l^2 才是希爾伯特空間。

接下來看兩個不完備空間的例子，第一個是由有理數組成的空間 $\mathbb{Q}$，這個空間上的距離函數跟 $\mathbb{R}$ 上的距離函數一樣，即

$$d_3(x,y) = |x-y| \qquad (6)$$

為證明 $\mathbb{Q}$ 不是完備空間，只需找出一個 $\mathbb{Q}$ 上的序列，使得這個序列是柯西序列，但卻不在 $\mathbb{Q}$ 上收斂。這並不困難，因為任何以無理數作為極限的有理數序列都可滿足上述要求，例如以下序列：

$$\left(\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{n!}, \sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}, \sum_{n=0}^{3}\frac{1}{n!}, \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}, \ldots, \right) \qquad (7)$$

上述序列是由無理數 e 的「泰勒級數展開式」(Taylor series expansion) 的「部分和」(partial sum) 組成的序列[2]，這個序列雖然每一項都是有理數 (因為每一項都是有限個有理數之和)，但它卻以無理數 e 作為極限。由於任何有理數都是實數，(7) 是一個實數收斂序列，因此根據「定理 2」，上述序列是柯西序列。由於 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$ 使用相同的距離函數 (6)，(7) 既是 $\mathbb{R}$ 上也是 $\mathbb{Q}$ 上的柯西序列，但這個序列卻不是 $\mathbb{Q}$ 上的收斂序列，因為它的極限不是有理數。

第二個不完備空間的例子是 $(C[a,b], d_4)$，其中 d_4 的定義如下：

$$d_4(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

以下讓我們證明 $(C[a,b], d_4)$ 不是完備空間，為此只需找出一個 $(C[a,b], d_4)$ 上的序列，使得這個序列是柯西序列，但卻不在 $(C[a,b], d_4)$ 上收斂，以下

[2] e 的「泰勒級數展開式」是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$。

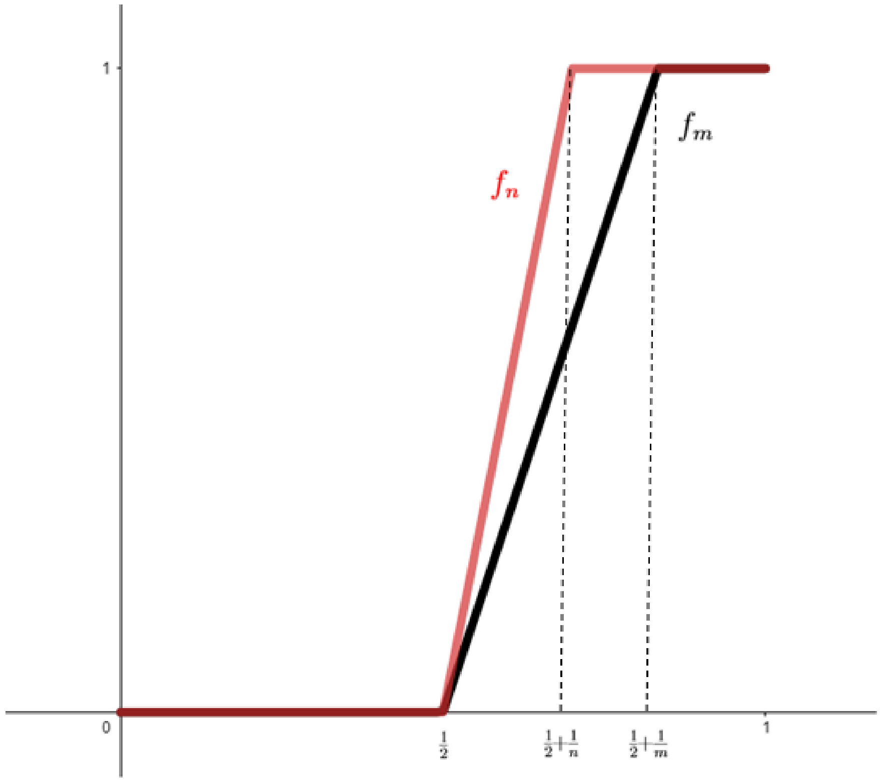
是所需序列 (以下設定 $[a,b]=[0,1]$，並請注意以下序列的下標是從 2 而非 1 開始)：

$$(f_2, f_3, f_4, f_5, \ldots),\ 其中 f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ nx - \frac{n}{2}, & \text{if } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{if } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \qquad (8)$$

上述序列是由函數組成的序列，其中每個項 f_n 都是實值連續函數[3]。以下首先證明 (8) 是柯西序列，為此要就任意兩個正實數 m 和 n 計算

$$d_4(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\, dx \qquad (9)$$

這似乎涉及頗複雜的積分運算，但我們可以借助下圖簡化運算：



上圖描繪了 f_n 和 f_m 這兩個函數的圖象 (不失一般性，這裡假設 m < n)，

[3]由於 f_n 是由三個連續函數組成的「分段定義函數」(piecewise-defined function)，要證明它是連續函數，必須證明這個函數在各個段的邊界點上沒有出現不連續的值。由於把 $\frac{1}{2}$ 代入 $nx - \frac{n}{2}$ 中的 x 可得 0，跟這個函數在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的值相同，而把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ 代入 $nx - \frac{n}{2}$ 中的 x 可得 1，跟這個函數在 $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ 上的值相同，所以這個函數在各個段的邊界點上沒有出現不連續的值。

根據數學分析，(9) 的值等於上圖中紅線和黑線所框著的三角形的面積，由此容易計算

$$d_4(f_m, f_n) = \frac{1}{2} \times \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

上述結果顯示，(8) 中的項 f_m 與 f_n 的距離隨著 m 和 n 增大而不斷減小，因此可以證明給定任何大於 0 的 ϵ，都總能找到一個正整數 N，使得若 $m, n > N$，則 $d_4(f_m, f_n) < \epsilon$，這即是說 (8) 是柯西序列。

接著用反證法證明 (8) 並不在 $(C[0,1], d_4)$ 上收斂，為此假設 f_n 趨向於一個極限 f，即 $d_4(f_n, f)$ 趨向於 0。根據 f_n 的定義，我們進行以下計算：

$$\begin{aligned} d_4(f_n, f) &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - f(x)|\, dx \end{aligned}$$

由於上列三個被積函數都是非負函數 (它們被置於絕對值符號內)，上列三個積分的值都是非負實數，因此如果 $d_4(f_n, f)$ 趨向於 0，這三個值必各自趨向於 0。但隨著 n 趨向無窮大，$\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ 必趨向於 $\frac{1}{2}$。這麼一來，我們勢必有

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{if } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

無論 $f(\frac{1}{2})$ 的值是甚麼，上述函數都不是連續的，即 $f \notin C[0,1]$，這即是說 (8) 這個序列不可能在 $(C[0,1], d_4)$ 上收斂，至此證得 $(C[0,1], d_4)$ 不是完備的。一般地，還可以證明 $(C[a,b], d_5)$ 不是完備的，其中

$$d_5(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(在上式中，$p \geq 1$，請注意前面的 d_4 是上式的特例)，但證明較複雜，茲從略。

如前所述，$\mathbb{Q}$ 是不完備空間，但我們知道 $\mathbb{Q}$ 是完備空間 $\mathbb{R}$ 的子集。此一結果不是偶然的，而是一個普遍的結果。事實上，可以證明以下事實：對於任何距離空間 (Y, d)，都有一個完備空間 $(\bar{X}, \bar{d})$，使得 Y 在某種意義上等同於 $\bar{X}$ 的某個子集 $\bar{Y}$，數學上把上述這個完備空間 $(\bar{X}, \bar{d})$ 稱為 (Y, d) 的完備化(completion)[4]，

[4]請注意在泛函分析中，上述事實有更精確的表述，其中 $\bar{Y}$ 是 $\bar{X}$ 的「稠密子空間」(dense subspace)，並且 Y 與 $\bar{Y}$「等距同構」(isometric)，但為免引入眾多新概念，這裡只直觀地說「Y 在某種意義上等同於 $\bar{X}$ 的某個子集 $\bar{Y}$」。

舉例說，$\mathbb{R}$ 就是 $\mathbb{Q}$ 的完備化。如前所述，$\mathbb{Q}$ 之所以不完備是因為存在一些不收斂到有理數的有理數柯西序列。為解決這個問題，我們可以把所有有理數柯西序列組成一個集合 $\bar{X}$[5]，例如 $\bar{X}$ 的一個成員就是上述的 (7)，容易看到，(7) 這個序列對應著實數 e，其他有理數柯西序列也各對應著一個實數。反過來，也可以證明每一個實數都對應著一個有理數柯西序列，由此可見，$\bar{X}$ 實質上等同於 $\mathbb{R}$。

為使 $\bar{X}$ 變成距離空間，可以定義 $\bar{X}$ 上的距離函數 $\bar{d}$ 如下：設 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ 和 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 為 $\bar{X}$ 中的元素，則

$$\bar{d}((x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty}) = \lim_{k\to\infty} |x_k - y_k|$$

可以證明，$(\bar{X}, \bar{d})$ 是完備距離空間，而且 $\mathbb{Q}$ 在某種意義上等同於上述 $\bar{X}$ 的某個子集 $\bar{Y}$。直觀地看，這個 $\bar{Y}$ 就是由以有理數作為極限的有理數柯西序列組成的集合，例如以下就是以有理數 $\frac{1}{2}$ 作為極限的柯西序列：

$$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \ldots\right)$$

因此上述序列是 $\bar{Y}$ 的一個成員。容易看到，$\bar{Y}$ 的每個成員各自對應著一個有理數 (例如上述 $\bar{Y}$ 的成員便對應著有理數 $\frac{1}{2}$)，因此 $\bar{Y}$ 實質上等同於 $\mathbb{Q}$。總上所述，$\mathbb{Q}$ 在某種意義上等同於完備空間 $\mathbb{R}$ 的某個子集，因此 $\mathbb{R}$ 確是 $\mathbb{Q}$ 的完備化。

應用上述過程，還可以求得前述不完備空間 $(C[a,b], d_5)$ 的完備化，在數學上這種空間稱為「勒貝格空間」(Lebesgue space)，記作 $(L^p[a,b], d_6)$ (其中 p 是固定的實數並且 $1 \leq p < \infty$)。這裡 $L^p[a,b]$ 的成員是以 $[a,b]$ 為定義域且滿足

$$\int_{[a,b]} |f|^p \, d\mu < \infty$$

的「可測函數」(measurable function) f，其中 $\int_{[a,b]} \cdot \, d\mu$ 代表「勒貝格積分」

[5]嚴格地說，$\bar{X}$ 的成員應是有理數柯西序列的等價類，這些等價類是建基於「有相同極限」此一等價關係。但為簡便起見，以下在論述這些等價類時，我們僅取這些等價類的某個代表。換句話說，以下當我們提到「有理數柯西序列 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$」時，其實是指「以 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ 為代表的有理數柯西序列等價類」。這種情況跟有理數的情況其實是一樣的，有理數的成員嚴格地說也是等價類，例如 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$ 等便構成一個等價類，但為簡便起見，在論述有理數時，我們僅取這些等價類的某個代表。換句話說，當我們提到「有理數 $\frac{1}{2}$」時，其實是指「以 $\frac{1}{2}$ 為代表的有理數等價類」。

(Lebesgue integral)[6]，d_6 則是如下定義的距離函數：

$$d_6(f,g) = \left(\int_{[a,b]} |f-g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (10)$$

如果讀者對「可測函數」和「勒貝格積分」不熟悉，那麼可以把這兩者分別看成「連續函數」和一般「黎曼積分」$\int_b^a \cdot \, dx$ 的推廣。舉例說，以下定義於 $[0,1]$ 的函數顯然不是連續函數而且不是黎曼可積的：

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

但它卻是可測函數，並且有 $\int_{[0,1]} g \, d\mu = 0$，故有 $g \in L^1[0,1]$。對於定義於 $[0,1]$ 的連續函數而言，其勒貝格積分等同於其黎曼積分。可以證明，對任何 $1 \leq p < \infty$，$(L^p[a,b], d_6)$ 是完備距離空間，而且 $(C[a,b], d_5)$ 在某種意義上等同於 $(L^p[a,b], d_6)$ 的某個子集，因此 $(L^p[a,b], d_6)$ 確是 $(C[a,b], d_5)$ 的完備化。

我們在《數學示例：內積空間》中曾指出 $(C[a,b], \langle\ \rangle_1)$ 構成內積空間，其中 $\langle\ \rangle_1$ 是如下定義的內積函數：

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

上述空間不是完備的，但跟前述情況相似，我們可以求這個空間的完備化，從而得到 $(L^2[a,b], \langle\ \rangle_2)$，其中 $\langle\ \rangle_2$ 是如下定義的內積函數：

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{[a,b]} f\overline{g} \, d\mu \qquad (11)$$

總上所述，$(L^2[a,b], \langle\ \rangle_2)$ 是完備的內積空間，即希爾伯特空間，這種空間具備豐富的數學結構 (即向量空間結構、距離函數、範數、內積函數等) 以及一種理想性質 (即完備性)，所以是泛函分析的重要研究對象。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[6]嚴格地說，$L^p[a,b]$ 的成員應是上述可測函數的等價類，這些等價類是建基於「幾乎處處相等」(equal almost everywhere) 此一等價關係，其中「幾乎處處相等」可以看成「相等」此一等價關係的推廣。但為簡便起見，以下在論述這些等價類時，我們僅取這些等價類的某個代表。換句話說，以下當我們提到「可測函數 f」時，其實是指「以 f 為代表的可測函數等價類」。