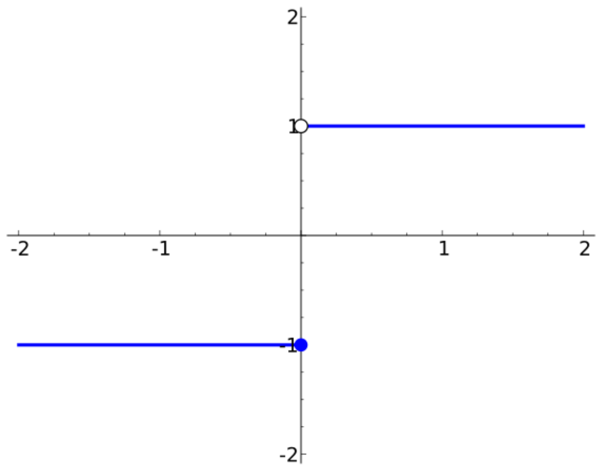
數學示例：連續函數與同胚

「連續函數」是拓樸學中另一個重要課題，它可以看成對數學分析中連續函數概念的推廣，因此以下先對數學分析中最簡單的連續函數－「一元實值連續函數」作一介紹。直觀地看，一元實值連續函數就是其圖像可以描繪成一條沒有斷開的曲線 (以下凡提到「曲線」，也包括直線) 的函數，例如下列「階躍函數」(step function)

$$f_1(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x \leq 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

便不是連續的，因為其圖像在 $x = 0$ 處斷開了：



直觀地看，f_1 之所以在 $x = 0$ 處不連續，是因為當我們從 $x > 0$ 那邊逐漸迫近 $x = 0$ 時，$f_1(x)$ 的值卻並非從 1 ($x > 0$ 時的值) 逐漸迫近 -1 ($x = 0$ 時的值)，而是突然跳躍至 -1。

數學分析採用一套 ϵ-δ 語言以精確表述上述直觀概念，這其實是對「極限」的 ϵ-δ 定義的應用。設 f 為把某定義域 D 映射到 $\mathbb{R}$ 內的函數，$a \in D$。如果給定任何正實數 ϵ，都總能找到一個正實數 δ，使得對任何屬於 D 且

滿足 $|x-a|<\delta$ 的 x，都有[1]

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon \qquad (2)$$

我們便說 f 在 a 處連續。如果 f 在 D 上每一點都連續，則 f 是連續函數(continuous function)。

以前面 (1) 中的函數 $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為例，這個函數顯然在 1 處連續，現證明如下。給定任何正實數 ϵ，只須設定 $\delta=1$。任何屬於 $\mathbb{R}$ 且滿足 $|x-1|<1$ 的實數 x 都大於 0，因此必有

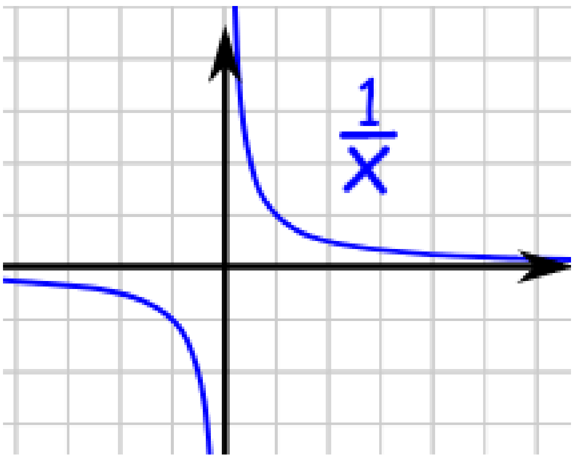
$$|f_1(x)-f_1(1)|=|1-1|=0<\epsilon$$

即 (2) 得到滿足。如前所述，f_1 在 0 處不連續。為證明這一點，只需設定 $\epsilon=1$。由於對任何正實數 δ，必有正實數 x 屬於 $\mathbb{R}$ 且滿足 $|x-0|<\delta$，對於這樣的 x，必有

$$|f_1(x)-f_1(0)|=|1-(-1)|=2\not<1$$

因此 (2) 得不到滿足。

請注意根據上述定義，在判斷某函數是否連續函數時，只需考慮該函數定義域上的點。因此上述定義有時會跟我們的直觀不一致。考慮函數 $f_2:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}; f_2(x)=\frac{1}{x}$，這個函數的圖像雖然看似在 0 處不連續，如下圖所示：



但由於 0 不屬於 f_2 的定義域，所以在判斷 f_2 是否連續函數時，無需考慮 0 這一點。事實上，可以證明 f_2 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上各處都連續，因此根據上述

[1]使用「極限」概念，以下條件也可表述為 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$。

定義，f_2 是連續函數。

以上有關一元實值連續函數的定義可以推廣至 n 元實值連續函數。此外，上述定義還可進一步推廣至一般距離空間。我們在《數學示例：距離空間》中介紹了「距離空間」的概念，這是指一個集合 X 連同其上的距離函數 d 所形成的數學結構。設 f 為把距離空間 (X,d) 映射到距離空間 (Y,d') 內的函數[2]，$a \in X$。如果給定任何正實數 ϵ，都總能找到一個正實數 δ，使得對任何屬於 X 且滿足 $d(x,a) < \delta$ 的 x，都有

$$d'(f(x), f(a)) < \epsilon \qquad (3)$$

我們便說 f 在 a 處連續。以我們在《數學示例：拓樸空間》討論過的離散距離空間 (X_1, d_1) 為例，其中 $X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$，並且

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & 若 x = y \\ 1 & 若 x \neq y \end{cases}$$

把 X_1 映射到 X_1 的任何函數 f 都是連續函數，以下僅證明 f 在 $\spadesuit$ 處連續 (f 在 $\heartsuit$ 處連續的證明類似)。給定任何正實數 ϵ，只須設定 $\delta = 1$。屬於 X_1 且滿足 $d_1(x,\spadesuit) < 1$ 的元素 x 只有 $\spadesuit$，由於對任何函數 f 而言，$f(\spadesuit)$ 的值不是 $\spadesuit$ 就是 $\heartsuit$，故必有

$$d_1(f(\spadesuit), f(\spadesuit)) = 0 < \epsilon$$

因此 (3) 得到滿足。

以上我們把連續函數的定義從實值連續函數推廣到一般距離空間之間的連續函數。可是，上述定義仍包含一個涉及數值計量的距離函數。由於拓樸學的概念應不涉及數值計量，為使連續函數成為拓樸學概念，必須對前述連續函數定義作進一步的抽象化。

為此，我們先引入函數原像的概念。設 f 為把距離空間 (X,d) 映射到距離空間 (Y,d') 內的函數，並且 $S \subseteq Y$，則 S 在 f 下的原像(preimage)，記作 $f^{-1}(S)$ [3]，包括 X 中被 f 映射到 S 上的元素，即

$$f^{-1}(S) = \{x \in X : f(x) \in S\}$$

以前面討論過的 f_1 為例，讀者可自行驗證，${f_1}^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$，${f_1}^{-1}(\{0\}) = \emptyset$，${f_1}^{-1}(\{-1, 0\}) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ 等等。此外，根據原像的定義，對於任何 $x \in X$，均有以下重要關係：

$$x \in f^{-1}(S) \text{ 當且僅當 } f(x) \in S \qquad (4)$$

[2]為簡化討論，以下假設所有函數 f 都以整個距離空間 X 作為定義域。

[3]請注意「原像」和「逆函數」這兩個不同概念都用到 f^{-1} 這個符號，但根據上下文，應不致引起混淆。

接著引入以下定理。

定理 1：設 f 為把距離空間 (X,d) 映射到距離空間 (Y,d') 內的函數，則 f 是連續函數當且僅當，對 Y 上任何開集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X 上的開集。

為方便證明上述定理，現提供我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹的距離空間中開集的定義如下：設 U 為距離空間 (X,d) 的子集，如果對 U 的任何元素 a，都可找到一個開球 $B_d(a,r)$ (其中 r 是正實數)，使得

$$B_d(a,r) \subseteq U$$

則 U 是 X 上的開集。此外，還要把以上有關連續函數的定義改寫成以下等價形式[4]：如果給定任何正實數 ϵ，都總能找到一個正實數 δ，使得對任何 $x \in X$，若有 $x \in B_d(a,\delta)$，則必有

$$f(x) \in B_{d'}(f(a),\epsilon)$$

我們便說 f 在 a 處連續。

現證明「定理 1」。假設 f 是連續函數，以及 U 為 Y 上的開集。設 $a \in f^{-1}(U)$，由此根據 (4)，有 $f(a) \in U$。由於 U 是 Y 上的開集，可知存在正實數 ϵ，使得 $B_{d'}(f(a),\epsilon) \subseteq U$。由於 f 連續，可知存在正實數 δ，使得對任何 $x \in X$，若有 $x \in B_d(a,\delta)$，則必有 $f(x) \in B_{d'}(f(a),\epsilon)$。但由於 $B_{d'}(f(a),\epsilon) \subseteq U$，故必有 $f(x) \in U$，根據 (4)，此即 $x \in f^{-1}(U)$。至此證明了對任何 $x \in X$，若有 $x \in B_d(a,\delta)$，則必有 $x \in f^{-1}(U)$。根據集合論中 $\subseteq$ 的定義，這等價於 $B_d(a,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$。至此我們為 $f^{-1}(U)$ 的任意元素 a 找到了一個開球 $B_d(a,\delta)$，使得 $B_d(a,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$，由此證得 $f^{-1}(U)$ 是 X 上的開集。

反過來，假設對 Y 上任何開集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X 上的開集。設給定正實數 ϵ 並且 $a \in X$，那麼開球 $B_{d'}(f(a),\epsilon)$ 是 Y 上的開集，因此 $f^{-1}(B_{d'}(f(a),\epsilon))$ 是 X 上的開集。由於 $f(a) \in B_{d'}(f(a),\epsilon)$，根據 (4)，有 $a \in f^{-1}(B_{d'}(f(a),\epsilon))$。由於 $f^{-1}(B_{d'}(f(a),\epsilon))$ 是開集，可知存在正實數 δ，使得 $B_d(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d'}(f(a),\epsilon))$。上式告訴我們，對任何 $x \in X$，若有 $x \in B_d(a,\delta)$，則必有 $x \in f^{-1}(B_{d'}(f(a),\epsilon))$，根據 (4)，此即 $f(x) \in B_{d'}(f(a),\epsilon)$，由此證得 f 在 a 處連續。由於 a 是 X 上的任意元素，故證得 f 是連續函數。

拓樸學中連續函數的定義是對「定理 1」的抽象：設 f 為把拓樸空間 $(X,\mathfrak{T})$ 映射到拓樸空間 $(Y,\mathfrak{T}')$ 內的函數，若對 Y 上任何開集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X 上的開集，則 f 是連續函數。舉例說，考慮我們在《數學示例：拓樸空

[4]根據《數學示例：拓樸空間》中「開球」的定義，$d(x,a) < \delta$ 當且僅當 $x \in B_d(a,\delta)$，並且 $d'(f(x),f(a)) < \epsilon$ 當且僅當 $f(x) \in B_{d'}(f(a),\epsilon)$，因此以下定義跟前面的連續函數定義等價。

間》討論過的離散拓樸空間 $(X_1, \mathcal{T}_1)$，其中 $X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$，並且 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X_1)$ (即 X_1 的任何子集都是開集)。把 X_1 映射到 X_1 的任何函數 f 都是連續函數，這是因為不管 U 是甚麼集合，$f^{-1}(U)$ 都是 X_1 的子集，故必然是 X_1 上的開集，滿足前面連續函數的定義。

我們在《數學示例：開集與閉集》中曾指出開集與閉集是互補概念，因此上面有關連續函數的定義也可表述如下：設 f 為把拓樸空間 $(X, \mathcal{T})$ 映射到拓樸空間 $(Y, \mathcal{T}')$ 內的函數，若對 Y 上任何閉集 C，$f^{-1}(C)$ 都是 X 上的閉集，則 f 是連續函數。

利用連續函數的概念，便可引入拓樸學中另一重要概念－同胚。設 $f : X \to Y$ 為一一到上函數 (其中 X、Y 為拓樸空間)，那麼根據集合論的知識，f 的逆函數 $f^{-1} : Y \to X$ 存在。如果 f 和 f^{-1} 都是連續函數，則 f 稱為同胚(homeomorphism)，也可以說 X 與 Y 同胚。

若 $f : X \to Y$ 是一一到上函數，那麼 $f^{-1} : Y \to X$ 也是一一到上函數。在這種情況下，Y 的任何子集 U_Y 的每一個元素都對應著 X 中唯一一個元素，因此求 U_Y 在 f 下的原像等同於把函數 f^{-1} 作用於 U_Y，兩者都可表示成 $f^{-1}(U_Y)$。反過來，X 的任何子集 U_X 的每一個元素也對應著 Y 中唯一一個元素，因此求 U_X 在 f^{-1} 下的原像等同於把函數 f 作用於 U_X，由此可得等式

$$(f^{-1})^{-1}(U_X) = f(U_X)$$

根據連續函數的定義，如果 $f : X \to Y$ 是連續函數，那麼對 Y 上任何開集 U_Y，$f^{-1}(U_Y)$ 都是 X 上的開集，這即是說 f^{-1} 把開集映射為開集。反過來，如果 $f^{-1} : Y \to X$ 是連續函數，那麼對 X 上任何開集 U_X，$(f^{-1})^{-1}(U_X)$，即 $f(U_X)$，都是開集，這即是說 f 把開集映射為開集。綜合上述情況，我們看到若 $f : X \to Y$ 是同胚，那麼 f 把開集映射為開集，並且把非開集映射為非開集。換句話說，如果 X 與 Y 同胚，那麼 X 與 Y 有相同的拓樸結構。

「同胚」在拓樸學中起著類似「同構」(isomorphism) 在群論中的作用。同構是兩個群 X 與 Y 之間的一一到上函數，而且這個函數在把 X 映射到 Y 的過程中保存了 X 的群運算 (有關「群同構」的定義，請參閱《感受伽羅瓦：群的同態與同構》)，因此如果 X 與 Y 同構，那麼 X 與 Y 有相同的群論代數結構。在群論中，兩個互相同構的群可以看成等同。同樣，在拓樸學中，兩個互相同胚的拓樸空間可以看成等同。

請注意在抽象代數中，還有一個稱為「同態」(homomorphism) 的概念，這是指把群 X 映射到群 Y 並且保存 X 的群運算，但不一定具有一一到上性質的函數。由此可見，「同態」的英文名稱“homomorphism”雖然跟「同胚」的英文名稱“homeomorphism”非常相似 (兩者只相差一個字母

"e"), 但兩者並非對應概念, 因為前者不一定具有一一到上性質, 而後者則必定具有這種性質。事實上,與「同態」對應的拓樸學概念應是「連續函數」。

接下來提供同胚的一些例子。首先, $\mathbb{R}$ 上任何兩個開區間都互相同胚。舉例說, 設 $X_2 = (-1, 1)$ 和 $Y_2 = (0, 10)$, 我們可以定義函數 $f_2 : X_2 \to Y_2$ 及其逆函數 ${f_2}^{-1} : Y_2 \to X_2$ 如下：

$$f_2(x) = 5(x + 1)$$

$${f_2}^{-1}(x) = \frac{x - 5}{5}$$

讀者可自行驗證, 以上兩個函數確是 X_2 與 Y_2 之間的一一到上函數, 而且根據數學分析的知識, 可知以上兩個多項式函數都是連續函數, 由此可見 f_2 (及其逆函數 ${f_2}^{-1}$) 是同胚。如前所述, 拓樸學把互相同胚的拓樸空間視作等同。上述兩個開區間雖然有不同的長度, 但卻是同胚的, 這顯示拓樸學不考慮數值計量問題。

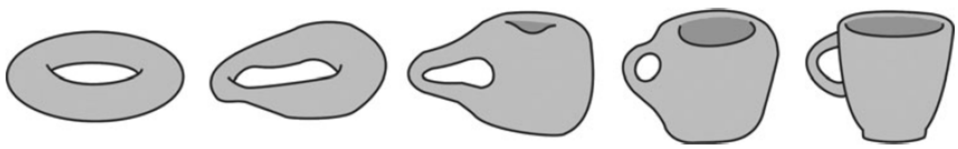
更有趣的是, 設 $X_2 = (-1, 1)$ 和 $Y_3 = \mathbb{R}$, 那麼 X_2 是長度有限的開區間, Y_3 是長度無限的整條實數線, 但兩者卻是同胚的。我們可以定義函數 $f_3 : X_2 \to Y_3$ 及其逆函數 ${f_3}^{-1} : Y_3 \to X_2$ 如下：

$$f_3(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

$${f_3}^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

學過三角函數的讀者應該知道, $\tan x$ 除了在 $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (其中 n 為任意整數) 處無定義外, 在其餘點處都是連續函數, 而且當 x 趨向 $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$ 時, $\tan x$ 分別趨向 ∞ 和 $-\infty$, 即 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上能取盡所有實數, 因此 f_3 是到上的。另外, 由於 $\tan x$ 以 π 作為周期, 而 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的 x 未達到一個周期, 因此在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上只有當 $x = y$ 時, 才有 $\tan x = \tan y$, 因此 f_3 是一一的。反之, ${f_3}^{-1}$ 則是把 $\mathbb{R}$ 映射到 $(-1, 1)$ 的一一到上連續函數。由此可知, f_3 和 ${f_3}^{-1}$ 是 X_2 與 Y_3 之間的同胚。

在以上兩個例子中, 我們都明確提供了同胚函數。但在討論某些同胚關係時, 有時難以寫出明確的同胚函數。如非嚴格的數學論述, 常常可以用直觀的日常語言或圖畫來代替同胚函數。舉例說, 人們常戲說拓樸學家不能分辨甜甜圈與有耳杯子, 這實際是說, 甜甜圈與有耳杯子是同胚的。可是, 要寫出任意甜甜圈與有耳杯子之間的同胚, 幾乎是不可能的 (數學家根本沒有為「有耳杯子」定義常規形狀, 儘管「甜甜圈」在數學上確有一個常規形狀, 稱為「環面」(torus))。可是我們卻可以想像一個從甜甜圈到有耳杯子的連續演變過程, 如下圖所示：



上圖顯示四個演變過程，每一個演變過程都可以看成代表一個同胚，而四個同胚的複合就是把甜甜圈映射為有耳杯子的同胚 (可以證明同胚的複合也是同胚)。

直觀地看，也可以把上圖中的甜甜圈和有耳杯子看成用可任意膨脹或縮小的泥膠造成的物件，而上述演變過程就是把泥膠物件搓揉、擠壓、拉展的過程，但此過程不容許把泥膠撕開、穿洞或者堵塞原有的洞。正由於拓樸學不考慮數值計量，所以上述搓揉、擠壓、拉展雖然會改變物件的形狀，但形狀改變前後的物件卻可被視為等同。不過，由於上述過程不容許撕開、穿洞或者堵塞原有的洞，所以物件由多少塊組成、是否穿洞等，便成為拓樸學中物件的重要區別特徵。這注意甜甜圈和有耳杯子的共同特徵正是有一個洞，由此可見在拓樸學中，有一個洞的甜甜圈與沒有洞的朱古力豆不是同胚的，因而不被視作等同。

接下來看一個不同胚拓樸空間的例子，考慮前面討論過的離散拓樸空間 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 以及密著拓樸空間 $(X_1, \mathcal{T}_2)$，其中 $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X_1\}$ (即除了空集和 X_1 自身外，X_1 的其他子集都不是開集)，那麼 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 與 $(X_1, \mathcal{T}_2)$ 不可能同胚，現證明如下。設 f_4 為把 X_1 (以 $\mathcal{T}_2$ 為拓樸) 映射到 X_1 (以 $\mathcal{T}_1$ 為拓樸) 的任意一一到上函數。在 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 中，$\{\spadesuit\}$ 是開集，現考慮 ${f_4}^{-1}(\{\spadesuit\})$。由於 f_4 是一一到上函數，其逆函數必然也是一一到上函數，故 ${f_4}^{-1}(\{\spadesuit\})$ 必然是單元集。但在 $(X_1, \mathcal{T}_2)$ 中，任何單元集都不是開集，即 ${f_4}^{-1}(\{\spadesuit\})$ 不是開集，因此 f_4 不符合連續函數的定義，由此可知 f_4 不可能是同胚。由於 f_4 是任意的，這證明了 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 與 $(X_1, \mathcal{T}_2)$ 之間不存在任何同胚。

連結至數學專題
連結至周家發網頁