數學示例：逆變與協變變換

我們在《數學示例：張量與張量場》中介紹了「(r,s) 張量」的概念，並指出這個名稱中的 r 和 s 分別稱為「逆變度」和「協變度」，分別代表張量所需向量論元和餘向量論元的數目。但 r 和 s 除了反映張量的論元結構外，也反映張量分量的兩種變換方式－「逆變變換」和「協變變換」，本文主旨是介紹這兩種變換方式。

首先回顧線性代數的一些概念。給定某 n 維向量空間 V 的某個有序基底 $B=(e_1,\ldots,e_n)$，V 中的任何向量 v 都可表示成以下線性組合形式[1]：

$$v = v^i e_i \qquad (1)$$

其中 v^i 是 v 相對於 B 中成員 e_i 的分量。但一個向量空間往往可以有多於一個有序基底，設 $\overline{B}=(\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n)$ 為 V 的另一個有序基底，那麼 v 也可表示成另一線性組合形式：

$$v = \overline{v}^k \overline{e}_k \qquad (2)$$

其中 $\overline{v}^k$ 是 v 相對於 $\overline{B}$ 中成員 $\overline{e}_k$ 的分量。

現在的問題是，給定向量 v 相對於 B 某個成員的分量，如何求得 v 相對於 $\overline{B}$ 某個成員的分量？此即向量「分量變換」(component transformation) 的問題，傳統把「分量變換」稱為「坐標變換」(coordinate transformation)。為回答上述問題，我們首先就每個 i，把 e_i 表示成 $\overline{B}$ 中成員的以下線性組合形式[2]：

$$e_i = C_i^k \overline{e}_k \qquad (3)$$

其中 C_i^k 是 e_i 相對於 $\overline{B}$ 中成員 $\overline{e}_k$ 的分量。請注意由於 i 是自由變項，上式實際上代表著 n 條數式，這些數式共包含 n^2 個實數 C_i^k。為方便表述，我

[1]本文中的線性組合都寫成「嚴式求和約定」(以下簡稱「求和約定」) 規定的形式。為符合求和約定的規定，本文把基底向量和向量分量分別寫成下標 (例如 e_i) 和上標 (例如 v^i) 形式，並把基底餘向量和餘向量分量分別寫成上標 (例如 ϵ^j) 和下標 (例如 α_j) 形式。

[2]由於基底向量 e_i 本身也是向量空間 V 中的向量，所以 e_i 可以表示成 $\overline{B}$ 中成員的線性組合。

們把這些 C_i^k 組成一個 $n \times n$ 矩陣，使得 C_i^k 是這個矩陣第 k 行第 i 列上的項。這個矩陣可被看成代表分量變換的矩陣，傳統稱為「坐標變換矩陣」，以下記作 C。把 (3) 代入 (1)，可得

$$v = C_i^k v^i \overline{e}_k \qquad (4)$$

比較 (2) 與 (4)，可得

$$\overline{v}^k = C_i^k v^i \qquad (5)$$

上式就是把 v 相對於 B 中成員 e_i 的分量 (即 v^i) 變換成 v 相對於 $\overline{B}$ 中成員 $\overline{e}_k$ 的分量 (即 $\overline{v}^k$) 的公式。在實際應用中，也可使用 (4) 一次過求得 v 相對於 $\overline{B}$ 中各成員的分量。

我們在《數學示例：餘向量與 1 形式》中曾指出，對應每個 n 維向量空間 V 及其有序基底 $B = (e_1, \ldots, e_n)$，都有一個 n 維餘向量空間 V^* 和對應的有序基底 $B^* = (\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$，其中 B 和 B^* 的成員滿足

$$\epsilon^j(e_i) = e_i(\epsilon^j) = \delta_{ij} \qquad (6)$$

類似 V 的情況，V^* 中的任何餘向量 α 都可表示成以下線性組合形式：

$$\alpha = \alpha_j \epsilon^j \qquad (7)$$

其中 α_j 是 α 相對於 B^* 中成員 ϵ^j 的分量。現在如果 V 有另一個有序基底 $\overline{B} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$，那麼 V^* 也有另一個與 $\overline{B}$ 相對應的有序基底 $\overline{B}^* = (\overline{\epsilon}^1, \ldots, \overline{\epsilon}^n)$，其中 $\overline{B}$ 和 $\overline{B}^*$ 的成員滿足

$$\overline{\epsilon}^l(\overline{e}_k) = \overline{e}_k(\overline{\epsilon}^l) = \delta_{kl} \qquad (8)$$

相對於上述有序基底，α 也可表示成另一線性組合形式：

$$\alpha = \overline{\alpha}_l \overline{\epsilon}^l \qquad (9)$$

其中 $\overline{\alpha}_l$ 是 α 相對於 $\overline{B}^*$ 中成員 $\overline{\epsilon}^l$ 的分量。

餘向量空間 V^* 也有「分量變換」的問題，而有趣的是，這裡也有一條類似 (4) 的公式，而且這條公式所用的矩陣正好是 (4) 中矩陣 C 的逆，這是以下定理的內容。

定理 1：設 V、V^* 為如上定義的向量空間，B、$\overline{B}$、B^*、$\overline{B}^*$ 為如上定義的有序基底，C 為如上定義的坐標變換矩陣，C^{-1} 為這個矩陣的逆，$(C^{-1})_l^j$ 是這個逆矩陣第 j 行第 l 列上的項，則

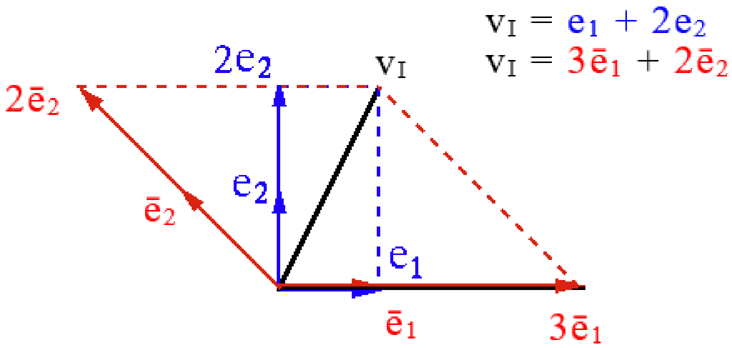
$$\alpha = (C^{-1})_l^j \alpha_j \overline{\epsilon}^l \qquad (10)$$

比較 (9) 與 (10)，可得

$$\overline{\alpha}_l = (C^{-1})_l^j \alpha_j \qquad (11)$$

上式就是把 α 相對於 B^* 中成員 ϵ^j 的分量 (即 α_j) 變換成 α 相對於 $\overline{B}^*$ 中成員 $\overline{\epsilon}^l$ 的分量 (即 $\overline{\alpha}_l$) 的公式。在實際應用中，也可使用 (10) 一次過求得 α 相對於 $\overline{B}^*$ 中各成員的分量。

現用下圖所示情況說明上述概念：



上圖展示 2 維向量空間 $\mathbb{R}^2$ 的兩個有序基底：$B_I = (e_1 = [1,0]^T, e_2 = [0,1]^T)$ 和 $\overline{B}_I = (\overline{e}_1 = [1,0]^T, \overline{e}_2 = [-1,1]^T)$ 及其上一個向量 v_I。上圖顯示，在 B_I 和 $\overline{B}_I$ 下，v_I 可分別表示成線性組合 $e_1 + 2e_2$ 和 $3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$。請讀者自行驗證，這兩個線性組合代表著同一個向量。接著把 e_1 和 e_2 寫成 (3) 中的數式，容易求得

$$e_1 = \overline{e}_1$$

$$e_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$$

由此可得到以下坐標變換矩陣：

$$C_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

接著用 (4) 把 v_I 相對於 B_I 中各成員的分量變換成相對於 $\overline{B}_I$ 中各成員的分量 (根據上圖，$v_I = e_1 + 2e_2$，故有 $(v_I)^1 = 1$ 和 $(v_I)^2 = 2$)：

$$\begin{aligned} v_I &= (C_I)_i^k (v_I)^i \overline{e}_k \\ &= (C_I)_1^1 (v_I)^1 \overline{e}_1 + (C_I)_2^1 (v_I)^2 \overline{e}_1 + (C_I)_1^2 (v_I)^1 \overline{e}_2 + (C_I)_2^2 (v_I)^2 \overline{e}_2 \\ &= (1)(1)\overline{e}_1 + (1)(2)\overline{e}_1 + (0)(1)\overline{e}_2 + (1)(2)\overline{e}_2 \\ &= 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 \end{aligned}$$

上述計算結果與上圖所示情況一致。

接著考慮餘向量空間 $\mathbb{R}^{2*}$ 及其兩個有序基底：${B_I}^* = (\epsilon^1 = [1,0], \epsilon^2 = [0,1])$ 和 ${\overline{B}_I}^* = (\bar{\epsilon}^1 = [1,1], \bar{\epsilon}^2 = [0,1])$。讀者可自行驗證，$B_I$、$\overline{B}_I$、${B_I}^*$ 和 ${\overline{B}_I}^*$ 的成員滿足 (6) 和 (8)。現設有 $\mathbb{R}^{2*}$ 中的一個餘向量 α_I，使得相對於 ${B_I}^*$ 和 ${\overline{B}_I}^*$，α_I 可分別表示成線性組合 $-5\epsilon^1 - \epsilon^2$ 和 $-5\bar{\epsilon}^1 + 4\bar{\epsilon}^2$。請讀者自行驗證，這兩個線性組合代表著同一個餘向量。為使用 (10)，須先求 (12) 的逆：

$$
{C_I}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)
$$

接著便可用 (10) 把 α 相對於 B^* 中各成員的分量變換成相對於 $\overline{B}^*$ 中各成員的分量 (根據前面的設定，$\alpha_I = -5\epsilon^1 - \epsilon^2$，故有 $(\alpha_I)_1 = -5$ 和 $(\alpha_I)_2 = -1$)：

$$
\begin{aligned}
\alpha_I &= ({C_I}^{-1})^j_l (\alpha_I)_j \bar{\epsilon}^l \\
&= ({C_I}^{-1})^1_1 (\alpha_I)_1 \bar{\epsilon}^1 + ({C_I}^{-1})^1_2 (\alpha_I)_1 \bar{\epsilon}^2 + ({C_I}^{-1})^2_1 (\alpha_I)_2 \bar{\epsilon}^1 + ({C_I}^{-1})^2_2 (\alpha_I)_2 \bar{\epsilon}^2 \\
&= (1)(-5)\bar{\epsilon}^1 + (-1)(-5)\bar{\epsilon}^2 + (0)(-1)\bar{\epsilon}^1 + (1)(-1)\bar{\epsilon}^2 \\
&= -5\bar{\epsilon}^1 + 4\bar{\epsilon}^2
\end{aligned}
$$

上述計算結果與前面的設定一致。

以上介紹了向量 (即 $(1,0)$ 張量) 和餘向量 (即 $(0,1)$ 張量) 的分量變換，接下來介紹一般 (r,s) 張量的分量變換。設 V、V^* 為如上定義的向量／餘向量空間，B、$\overline{B}$、B^*、$\overline{B}^*$ 為如上定義的有序基底，那麼根據我們在《數學示例：張量與張量場》的討論，以下是 (r,s) 張量空間 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ 的兩個有序基底 (以下第一式等於上述網頁的 (4))：

$$
(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s} : 1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \le n) \qquad (14)
$$

$$
(\bar{e}_{k_1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{k_r} \otimes \bar{\epsilon}^{l_1} \otimes \ldots \otimes \bar{\epsilon}^{l_s} : 1 \le k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \le n) \qquad (15)
$$

而 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ 的任意成員 T 可以表示成以下兩個線性組合之一 (以下第一式等於上述網頁的 (5))：

$$
T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s} \qquad (16)
$$

$$
T = \overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}\, \bar{e}_{k_1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{k_r} \otimes \bar{\epsilon}^{l_1} \otimes \ldots \otimes \bar{\epsilon}^{l_s} \qquad (17)
$$

其中 $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ 是 T 相對於 (14) 中成員 $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s}$ 的分量，而 $\overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$ 則是 T 相對於 (15) 中成員 $\bar{e}_{k_1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{k_r} \otimes \bar{\epsilon}^{l_1} \otimes \ldots \otimes \bar{\epsilon}^{l_s}$ 的分量。

(r,s) 張量空間同樣有「分量變換」的問題。由於 (r,s) 張量是向量和餘向量的推廣，它的分量變換公式是前述向量和餘向量的分量變換公式的某種結合，這是以下定理的內容。

定理 2：設 V、V^*、B、$\overline{B}$、B^*、$\overline{B}^*$、C、C^{-1}、$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ 和 $\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}$ 如上定義，則

$$\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s} = C^{k_1}_{i_1}\ldots C^{k_r}_{i_r}(C^{-1})^{j_1}_{l_1}\ldots(C^{-1})^{j_s}_{l_s}\,T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \qquad (18)$$

上式就是把 $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ 轉換成 $\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}$ 的公式。在實際應用中，也可使用下式一次過求得 T 相對於 (15) 中各成員的分量 (下式是把 (18) 代入 (17) 的結果)：

$$T = C^{k_1}_{i_1}\ldots C^{k_r}_{i_r}(C^{-1})^{j_1}_{l_1}\ldots(C^{-1})^{j_s}_{l_s}\,T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\,\overline{e}_{k_1}\otimes\ldots\otimes\overline{e}_{k_r}\otimes\overline{\epsilon}^{l_1}\otimes\ldots\otimes\overline{\epsilon}^{l_s} \qquad (19)$$

舉例說，設我們沿用前面 $\mathbb{R}^2$ 的有序基底 B_I 和 $\overline{B}_I$ 以及 $\mathbb{R}^{2*}$ 的有序基底 ${B_I}^*$ 和 ${\overline{B}_I}^*$，並考慮 $(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1}\otimes(\mathbb{R}^2)^{*\otimes 1}$ 中的以下 $(1,1)$ 張量：

$$T_I = 5e_1\otimes\epsilon^2 - 3e_2\otimes\epsilon^2 \qquad (20)$$

上式顯示 T_I 相對於 B_I 和 ${B_I}^*$ 的分量，現在讓我們用 (19) 以及前面求得的 C_I 和 ${C_I}^{-1}$ 將上式中的分量改寫成相對於 $\overline{B}_I$ 和 ${\overline{B}_I}^*$ 的分量：

$$\begin{aligned}
& T_I \\
= \;& (C_I)^k_i({C_I}^{-1})^j_l\,(T_I)^i_j\,\overline{e}_k\otimes\overline{\epsilon}^l \\
= \;& (C_I)^1_1({C_I}^{-1})^2_1\,(T_I)^1_2\,\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^1 + (C_I)^1_1({C_I}^{-1})^2_2\,(T_I)^1_2\,\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
& +(C_I)^1_2({C_I}^{-1})^2_1\,(T_I)^2_2\,\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^1 + (C_I)^1_2({C_I}^{-1})^2_2\,(T_I)^2_2\,\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
& +(C_I)^2_1({C_I}^{-1})^2_1\,(T_I)^1_2\,\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^1 + (C_I)^2_1({C_I}^{-1})^2_2\,(T_I)^1_2\,\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
& +(C_I)^2_2({C_I}^{-1})^2_1\,(T_I)^2_2\,\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^1 + (C_I)^2_2({C_I}^{-1})^2_2\,(T_I)^2_2\,\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
= \;& (1)(0)(5)\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^1 + (1)(1)(5)\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^2 + (1)(0)(-3)\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^1 + (1)(1)(-3)\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
& +(0)(0)(5)\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^1 + (0)(1)(5)\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^2 + (1)(0)(-3)\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^1 + (1)(1)(-3)\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^2 \\
= \;& 2\overline{e}_1\otimes\overline{\epsilon}^2 - 3\overline{e}_2\otimes\overline{\epsilon}^2 \qquad (21)
\end{aligned}$$

請注意如按求和約定完全展開上面第二行，第三行應共有 16 項 (因為 i、j、k 和 l 各可在 1 與 2 之間取值)。但由於從 (20) 可知，$(T_I)^1_1 = (T_I)^2_1 = 0$，為免過於冗長，上面第三行略去了包含 $(T_I)^1_1$ 和 $(T_I)^2_1$ 的項，所以該行只有 8 項。

根據 $(1,1)$ 張量的定義，把 T_I 作用於前面討論過的 α_I 和 v_I，應得到一個實數。現在 T_I、α_I 和 v_I 都各有兩個形式 (即相對於有序基底 B_I ／ ${B_I}^*$) 的形式和相對於有序基底 $\overline{B}_I$ ／ ${\overline{B}_I}^*$) 的形式)，因此我們可以運用這

兩組形式計算 $T_I(\alpha_I, v_I)$ 兩次，看看是否有相同的結果。讀者可自行驗證，一方面，相對於 B_I ／ $B_I{}^*$，我們有

$$(5e_1 \otimes \epsilon^2 - 3e_2 \otimes \epsilon^2)(-5\epsilon^1 - \epsilon^2, e_1 + 2e_2) = -44$$

另一方面，相對於 $\overline{B}_I$ ／ $\overline{B}_I{}^*$，我們又有

$$(2\overline{e}_1 \otimes \overline{\epsilon}^2 - 3\overline{e}_2 \otimes \overline{\epsilon}^2)(-5\overline{\epsilon}^1 + 4\overline{\epsilon}^2, 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2) = -44$$

上述兩個 $T_I(\alpha_I, v_I)$ 有相同的值，由此驗證了前面的 (20) 和 (21) 是同一個張量 T_I 相對於不同有序基底的表示形式。

以上介紹的是一般張量的分量變換，接下來介紹「寄生」於 m 維流形 M 某點 p 處的張量的分量變換，設 $(x_1, \ldots, x_m)$ 和 $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^m)$ 為 M 上兩個坐標系的坐標。首先考慮切空間 T_pM，並設 $B = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ 和 $\overline{B} = (\frac{\partial}{\partial \overline{x}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{x}^m})$ 為這個空間的兩個有序基底[3]。相對於這兩個有序基底，T_pM 中的任何切向量 v 可以表示成以下兩個線性組合之一：

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (22)$$

$$v = \overline{v}^k \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} \qquad (23)$$

為求上述切向量的分量變換公式，我們沿用前面介紹的方法，首先就每個 i，把 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 表示成 $\overline{B}$ 中成員的以下線性組合[4]：

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} \qquad (24)$$

由於 i 是自由變項，上式實際上代表著 m 條數式，這些數式共包含 m^2 個實數 $\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}$。我們可以把這些實數組成一個 $m \times m$ 矩陣，以下把這個矩陣記作 $\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}$，$\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}$ 是這個矩陣第 k 行第 i 列上的項，即：

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^m} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

---

[3]為免使數式過於繁複，本文略去切向量／餘切向量的下標 p。

[4]數式 (24) 可用以下方法求得：設 f 為任意 m 元函數，根據求導的「鏈式法則」(chain rule)，我們有

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^i}$$

把 f 抽象出來，對調各項中兩個因子的次序，並用求和約定改寫上式，便可得到 (24)。

上述矩陣其實就是 $\overline{x}^1$、...、$\overline{x}^m$ 作為 x^1、...、x^m 的函數的「雅可比矩陣」(Jacobian matrix)。把 (24) 代入 (22)，可得

$$v = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} v^i \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} \qquad (26)$$

比較 (23) 與 (26)，可得

$$\overline{v}^k = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} v^i \qquad (27)$$

在張量分析中，像 (27) 那樣的分量變換 (請注意 x 和 $\overline{x}$ 分別位於「分母」和「分子」位置) 稱為逆變變換(contravariant transformation)。

其次考慮餘切空間 T_p^*M。根據《數學示例：餘向量與 1 形式》，可知 $B^* = (dx^1, \ldots, dx^m)$ 和 $\overline{B}^* = (d\overline{x}^1, \ldots, d\overline{x}^m)$ 是這個空間中分別對應著前面提過的 B 和 $\overline{B}$ 的兩個有序基底。相對於上述兩個有序基底，T_p^*M 中的任何餘切向量 α 可以表示成以下兩個線性組合之一：

$$\alpha = \alpha_j dx^j \qquad (28)$$

$$\alpha = \overline{\alpha}_l d\overline{x}^l \qquad (29)$$

我們可以沿用「定理 1」去求上述餘切向量的分量變換公式。為使用該定理，要求 (25) 中雅可比矩陣的逆。但根據多元函數微積分，(25) 的逆等於以下矩陣，以下把這個矩陣記作 $\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}$，$\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}$ 是這個矩陣第 j 行第 l 列上的項，即：

$$\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^m} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

把上述結果套用到 (10)，便可得到

$$\alpha = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l} \alpha_j d\overline{x}^l \qquad (31)$$

比較 (29) 與 (31)，可得

$$\overline{\alpha}_l = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l} \alpha_j \qquad (32)$$

在張量分析中，像 (32) 那樣的分量變換 (請注意 x 和 $\overline{x}$ 分別位於「分子」和「分母」位置) 稱為協變變換(covariant transformation)。

至此我們看到，切向量和餘切向量的分量變換分別具有逆變變換和協變變換的形式[5]，因此切向量 (亦即 $(1,0)$ 張量) 和餘切向量 (亦即 $(0,1)$ 張量) 可分別被看成「逆變張量」和「協變張量」的一種，這一點正與《數學示例：張量與張量場》的討論吻合。

接著考慮一般 (r,s) 張量。根據我們在《數學示例：張量與張量場》的討論，以下是 (r,s) 張量空間 $T_pM^{\otimes r}\otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 的兩個有序基底 (以下第一式大致等於上述網頁的 (13))：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}:1\leq i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\leq m\right) \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_r}}\otimes d\overline{x}^{l_1}\otimes\ldots\otimes d\overline{x}^{l_s}:1\leq k_1,\ldots,k_r,l_1,\ldots,l_s\leq m\right) \tag{34}$$

相對於上述兩個有序基底，$T_pM^{\otimes r}\otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的任何 (r,s) 張量 T 可以表示成以下兩個線性組合之一 (以下第一式大致等於上述網頁的 (14))：

$$T=T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s} \tag{35}$$

$$T=\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_r}}\otimes d\overline{x}^{l_1}\otimes\ldots\otimes d\overline{x}^{l_s} \tag{36}$$

為求上述張量的分量變換公式，只需把「定理 2」中的矩陣 C 和 C^{-1} 改為前面提過的雅可比矩陣及其逆矩陣，由此我們有

$$\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}=\frac{\partial\overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\overline{x}^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial\overline{x}^{l_s}}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \tag{37}$$

把 (37) 代入 (36)，可得

$$T=\frac{\partial\overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\overline{x}^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial\overline{x}^{l_s}}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_r}}\otimes d\overline{x}^{l_1}\otimes\ldots\otimes d\overline{x}^{l_s} \tag{38}$$

請注意 (37) 等號右端乘積中的首 r 個因子具有逆變變換的形式 (x 和 $\overline{x}$ 分別位於「分母」和「分子」位置)，而接下來的 s 個因子則具有協變變換的形式 (x 和 $\overline{x}$ 分別位於「分子」和「分母」位置)，這就是 r 和 s 分別稱為「逆變度」和「協變度」的原因。

根據《數學示例：張量與張量場》，流形 M 上的 (r,s) 張量場是把 M 的

[5]請注意某些張量分析的教科書以逆變／協變變換作為張量定義的一部分，而其他教科書則把逆變／協變變換處理成可從張量的定義推導出來的一種性質，本文採納第二種方式。

可變點 x 映射為 $T_xM^{\otimes r} \otimes T_x^*M^{\otimes s}$ 中的張量的函數。由於 $T_xM^{\otimes r} \otimes T_x^*M^{\otimes s}$ 可以有不同的有序基底，同一個 (r, s) 張量場可以表現為不同形式，例如 (以下第一式大致等於上述網頁的 (21))：

$$T(x) = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \tag{39}$$

$$T(\overline{x}) = \overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}(\overline{x}) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_r}} \otimes d\overline{x}^{l_1} \otimes \ldots \otimes d\overline{x}^{l_s} \tag{40}$$

在以上兩式中，$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x)$ 和 $\overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}(\overline{x})$ 是會隨 x 或 $\overline{x}$ 而變化的函數，因此可看作「可變分量」，而這些可變分量的變換法則與固定點處的張量的分量變換法則有相同的形式，因此對應 (37) 和 (38)，我們有

$$\overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}(\overline{x}) = \frac{\partial \overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \overline{x}^{l_s}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x) \tag{41}$$

$$T(\overline{x}) = \frac{\partial \overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \overline{x}^{l_s}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k_r}} \otimes d\overline{x}^{l_1} \otimes \ldots \otimes d\overline{x}^{l_s} \tag{42}$$

舉例說，設 2 維流形 $\mathbb{R}^2$ 有兩個坐標系，其關係可以表示成 $\overline{x}^1$、$\overline{x}^2$ 與 x^1、x^2 之間的以下函數關係：

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = x^1 + x^2 \\ \overline{x}^2 = x^2 - 5 \end{cases} \tag{43}$$

從以上兩式可以推導出以下函數關係：

$$\begin{cases} x^1 = \overline{x}^1 - \overline{x}^2 - 5 \\ x^2 = \overline{x}^2 + 5 \end{cases} \tag{44}$$

對應坐標系 (x^1, x^2)，$\mathbb{R}^2$ 每一點處的切空間和餘切空間有以下有序基底：$B_{II} = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$ 和 $B_{II}{}^* = (dx^1, dx^2)$；對應坐標系 $(\overline{x}^1, \overline{x}^2)$,$\mathbb{R}^2$ 每一點處的切空間和餘切空間則有以下有序基底：$\overline{B}_{II} = (\frac{\partial}{\partial \overline{x}^1}, \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2})$ 和 $\overline{B}_{II}{}^* = (d\overline{x}^1, d\overline{x}^2)$。

現設有 $\mathbb{R}^2$ 上的以下 $(1, 1)$ 張量場：

$$T_{II}(x^1, x^2) = (x^1 + (x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + (x^2 - x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \tag{45}$$

上式顯示 $T_{II}(x^1, x^2)$ 相對於 B_{II} 和 $B_{II}{}^*$ 的分量，現在讓我們將上式中的分量改寫成相對於 $\overline{B}_{II}$ 和 $\overline{B}_{II}{}^*$ 的分量。為此，須先求 (43) 的雅可比矩陣 $\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}$ 及其逆 $\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}$。從 (43) 和 (44) 容易求得

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (47)$$

以上兩個矩陣正好分別等於前面算得的 C_I 和 $(C_I)^{-1}$。接著便可運用 (42) 和 (44) 進行以下計算：

$$\begin{aligned}
& T_{II}(\overline{x}^1, \overline{x}^2) \\
= \;& \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l} (T_{II})^i_j(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} \otimes d\overline{x}^l \\
= \;& ((x^2)^2 + x^2) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} \otimes d\overline{x}^2 + (x^2 - x^1) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} \otimes d\overline{x}^2 \\
= \;& ((\overline{x}^2 + 5)^2 + (\overline{x}^2 + 5)) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} \otimes d\overline{x}^2 + ((\overline{x}^2 + 5) - (\overline{x}^1 - \overline{x}^2 - 5)) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} \otimes d\overline{x}^2 \\
= \;& ((\overline{x}^2)^2 + 11\overline{x}^2 + 30) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} \otimes d\overline{x}^2 + (-\overline{x}^1 + 2\overline{x}^2 + 10) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} \otimes d\overline{x}^2 \qquad (48)
\end{aligned}$$

為驗證上述計算結果，一方面，我們把坐標系 (x^1, x^2) 上的點 $(1, -2)$ 代入 (45)，可得

$$T_{II}(1, -2) = 5 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 - 3 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (49)$$

另一方面，從 (43) 可知坐標系 (x^1, x^2) 上的點 $(1, -2)$ 對應著坐標系 $(\overline{x}^1, \overline{x}^2)$ 上的點 $(-1, -7)$。接著把 $(-1, -7)$ 代入 (48)，可得

$$T_{II}(-1, -7) = 2 \frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} \otimes d\overline{x}^2 - 3 \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} \otimes d\overline{x}^2 \qquad (50)$$

容易看到，(49) 和 (50) 實質分別等於前面的 (20) 和 (21)。但我們在前面已指出，(20) 和 (21) 是同一個 $(1, 1)$ 張量相對於不同有序基底的形式，因此 (49) 和 (50) 是 $(1, 1)$ 張量場 T_{II} 在同一點處的值的不同形式。

連結至數學專題
連結至周家發網頁