數學示例：可數性公理

我們在《數學示例：分離公理》中介紹了四條分離公理。除了分離公理外，拓樸學中還有若干條可數性公理(countability axiom)。跟分離公理一樣，可數性公理其實也是拓樸空間的限制條件，這些限制條件都是有關拓樸空間中是否存在某些可數集合。

「有限」、「可數」等是常見的關於集合「基數」(cardinality，即集合所含元素的個數) 的概念。在數學上，有限或可數集合 S 的基數可用 S 與另一個由整數組成的集合之間的一一到上函數來定義。設 n 為正整數，$N_n = \{1, 2, 3, 4, \ldots n\}$，如果存在一個 S 與 N_n 之間的一一到上函數，我們便說 S 的基數是 n，記作 $|S| = n$，即 S 包括 n 個元素。上述一一到上函數其實是日常點算物件過程的抽象，在點算物件時，我們常常一面指著物件(可以是用手指實質指著，也可以是在心中指著)，一面說出「一、二、三、四、...」，這實質上就是在當前物件與正整數之間建立一個一一到上的函數關係。

如果可以在 S 與某個 N_n 之間建立一一到上的函數關係，我們便說 S 是有限(finite) 集，否則 S 是無窮(infinite) 集。對於無窮集，還可以作進一步的細分。如果可以在 S 與自然數集 $\mathbb{N}$ (即由全體正整數組成的集合) 之間建立一一到上的函數關係，我們便說 S 是可數無窮(countably infinite) 集，否則 S 是不可數無窮(uncountably infinite) 集。此外，數學家也把有限集和可數無窮集統稱為可數(countable) 集。換句話說，如果可以在 S 與 $\mathbb{N}$ 或其子集之間建立一一到上的函數關係，我們便說 S 是可數集。此外，由於一個序列的項與自然數存在一一對應關係，我們也可以說 S 是可數集，如果可以把 S 的元素列出為某個序列的項。

舉例說，整數集 $\mathbb{Z}$ (即由正整數、0 和負整數組成的集合) 便是可數集。請注意雖然 $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的真子集，但我們卻可以在這兩個集合之間定義一一到上的函數，讀者可自行驗證，以下就是把 $\mathbb{Z}$ 映射到 $\mathbb{N}$ 的一一到上函數：

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{若} n > 0 \\ -2n + 1 & \text{若} n \leq 0 \end{cases}$$

上述函數的作用就是把全體整數列出為以下序列的項：

$$(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots)$$

以下定理提供一些關於可數集和不可數集的重要結果。

定理 1：

(i) 可數集的任何子集都是可數集

(ii) 有限多個可數集的笛卡爾積是可數集

(iii) 可數多個可數集的并集是可數集

(iv) $[a,b]$、(a,b)、$[a,b)$、$(a,b]$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$、$[a,\infty)$、(a,∞)、$(-\infty,\infty)$，其中 $a,b \in \mathbb{R}$ 並且 $a < b$，是不可數無窮集

根據上述定理，有理數集 $\mathbb{Q}$ 是可數集，理由如下。每個有理數 $\frac{p}{q}$ 都對應著一個有序對 (p,q)，其中 $p \in \mathbb{Z}$ 並且 $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$。由於 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z} - \{0\}$ 是可數集，根據「定理 1(ii)」，它們的笛卡爾積 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 也是可數集。但請注意 $\mathbb{Q}$ 並不等於上述笛卡爾積，這是因為同一個有理數對應著無窮多個有序對，例如 $\frac{1}{2}$ 便對應著 $(1,2)$、$(-1,-2)$、$(2,4)$、$(3,6)$ 等，因此 $\mathbb{Q}$ 對應著上述笛卡爾積的某個子集，由此根據「定理 1(i)」，可知 $\mathbb{Q}$ 是可數集。

接下來介紹三條可數性公理，每一條公理都對應著一種拓樸空間。第一條可數性公理須應用「局部基」的概念，故須先介紹此一概念。設 x 為拓樸空間 X 的元素，如果有一個由包括 x 的開集組成的集合 $\mathcal{L}_x$，對任何包括 x 的開集 U，都有 $\mathcal{L}_x$ 中某個成員 L_x 使得 $x \in L_x \subseteq U$，$\mathcal{L}_x$ 便稱為 x 的局部基(local basis)。以 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ (其中 $\mathcal{T}_s$ 代表實數的「標準拓樸」，即由全體開球組成的拓樸基生成的拓樸) 為例，讀者可自行驗證，$\mathcal{L}_0 = \{(a_0, b_0) : a_0, b_0 \in \mathbb{R} \wedge a_0 < 0 < b_0\}$ 是 0 的一個局部基。一般地，對任何實數 x，

$$\mathcal{L}_x = \{(a_x, b_x) : a_x, b_x \in \mathbb{R} \wedge a_x < x < b_x\} \qquad (1)$$

是 x 的一個局部基。

我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了拓樸基的概念，「局部基」與「拓樸基」分別是「局部」和「全局」的概念，其中局部基是就著拓樸空間的某一點 x 而言的，而拓樸基則是就著整個拓樸空間 X 而言的，這兩個概念存在以下聯繫。

定理 2：設 $(X, \mathcal{T})$ 為拓樸空間，

(i) 若 $\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的拓樸基，則對每個 $x \in X$，$\mathcal{L}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ 是 x 的一個局部基。

(ii) 對每個 $x \in X$，設 $\mathcal{L}_x$ 是 x 的局部基，則 $\bigcup_{x \in X} \mathcal{L}_x$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的一個拓樸基。

以 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 為例，我們知道 $\mathbb{R}$ 上全體開球組成的集合，即

$$\mathcal{B}_s = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R} \wedge r > 0\} \qquad (2)$$

構成 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 的拓樸基。在前面我們討論了實數 x 的局部基 $\mathcal{L}_x$ (見 (1))，請注意 $\mathcal{L}_x$ 的每個元素 (a_x, b_x) 都是開球，這是因為 (a_x, b_x) 可以寫成 $B(\frac{1}{2}(a_x + b_x), \frac{1}{2}(b_x - a_x))$ 的形式。由此可見，$\mathcal{L}_x$ 的元素就是所有包括 x 的開球，因此 $\mathcal{L}_x$ 正好等於 $\{B \in \mathcal{B}_s : x \in B\}$，「定理 2(i)」乃得驗證。反過來，如前所述，就每個實數 x 而言，$\mathcal{L}_x$ 等於所有包括 x 的開球組成的集合，因此 $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_x$ 等於 $\mathbb{R}$ 上全體開球組成的集合，因而是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 的一個拓樸基，「定理 2(ii)」乃得驗證。

第一條可數性公理是說，拓樸空間 X 的任何元素都有可數局部基 (即包括可數多個成員的局部基)，我們把滿足這條公理的空間稱為第一可數(first-countable) 空間。很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是第一可數的。

以下讓我們證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 是第一可數的。請注意前面的 $\mathcal{L}_0$ 是不可數的，這是因為小於 0 的實數個數和大於 0 的實數個數分別等於區間 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 中實數的個數，而根據「定理 1(iv)」，這兩個區間都是不可數無窮集。不過，這並不代表 0 沒有可數局部基，因為我們可以為 0 另找一個局部基，例如 $\mathcal{L}_0' = \{(-r, r) : r \in \mathbb{Q}^+\}$ (其中 $\mathbb{Q}^+$ 代表正有理數集合) 便符合我們的需要。讀者可自行驗證，$\mathcal{L}_0'$ 是 0 的局部基，而且由於每個 $(-r, r)$ 都對應著一個正有理數 r，$\mathcal{L}_0'$ 與 $\mathbb{Q}^+$ 存在一一對應關係，因此根據「定理 1(i)」，$\mathcal{L}_0'$ 是可數集。同理，對任何實數 x，$\{(x - r, x + r) : r \in \mathbb{Q}^+\}$ 都是 x 的一個可數局部基，由此可見任何實數都有可數局部基，因此 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 是第一可數的。

但也有並非第一可數的拓樸空間，例如我們在《數學示例：分離公理》中討論過的 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$，其中 $\mathcal{T}_f$ 代表 $\mathbb{R}$ 的「有限補拓樸」，其定義如下：

$$\mathcal{T}_f = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : U = \emptyset \vee \mathbb{R} - U \text{是有限集合}\} \qquad (3)$$

以下用反證法證明此一事實，故任取 $\mathbb{R}$ 上一點，例如 0，並假設在拓樸空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 中，0 有可數局部基 $\mathcal{L}_0''$。由於 $\mathcal{L}_0''$ 是可數集，其成員可被列出為以下序列的項：

$$(L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots, L_n, \ldots)$$

其中各個 L_n 是包括 0 的集合。根據局部基的定義，我們有

$$\text{對}(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)\text{上任何包括}\,0\,\text{的開集}\,U\text{，都有某個}\,n\in\mathbb{N}\text{，使得}\,L_n\subseteq U \tag{4}$$

對每個 $n\in\mathbb{N}$，定義 $F_n=\mathbb{R}-L_n$。由於 L_n 是局部基 $\mathcal{L}_0$" 的成員，它是 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)$ 上的開集，即 $\mathcal{T}_f$ 的成員，因此根據 (3)，$\mathbb{R}-L_n$ 是有限集，這即是說每個 F_n 都是有限集。現定義

$$F=\{0\}\cup F_1\cup F_2\cup\ldots$$

由於 F 是可數多個有限集的并集，根據「定理 1(iii)」，可知 F 是可數集。由於 $\mathbb{R}$ 是不可數集，故必存在 $x\in\mathbb{R}-F$，由此有

$$x\neq 0\ \wedge\ x\in\mathbb{R}-F_1\ \wedge\ x\in\mathbb{R}-F_2\ \wedge\ \ldots$$

即

$$x\neq 0\ \wedge\ x\in L_1\ \wedge\ x\in L_2\ \wedge\ \ldots$$

現設 $U_1=\mathbb{R}-\{x\}$，由於 $\mathbb{R}-U_1=\{x\}$ 是有限集，所以根據 (3)，U_1 是 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)$ 上的開集，而且由於 $x\neq 0$，這個開集包括 0。此外，對任何 $n\in\mathbb{N}$，由於 $x\in L_n$ 但 $x\notin U_1$，因此 $L_n\not\subseteq U_1$。至此我們證明了

$$\text{存在}(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)\text{上一個包括}\,0\,\text{的開集}\,U_1\text{，使得對任何}\,n\in\mathbb{N}\text{，都有}\,L_n\not\subseteq U_1 \tag{5}$$

但 (5) 與 (4) 矛盾，此一矛盾顯示我們最初的假設－ 0 有可數局部基，是不正確的，因此 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)$ 不是第一可數的。

第二條可數性公理須應用「稠密子集」的概念，故須先介紹此一概念。設 S 為拓樸空間 X 的子集，如果 $\overline{S}=X$，其中 $\overline{S}$ 代表 S 的閉包，我們便說 S 在 X 中稠密(dense)，或者 S 是 X 的稠密子集。$\overline{S}=X$ 公式的意思是，X 中每個元素都是 S 的閉包點。根據《數學示例：開集與閉集》中閉包點的定義，這即是說，對 X 中每個元素 x 而言，每個包括 x 的開集 U 都包括至少一個 S 的元素。舉例說，在標準拓樸下，$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集，這是因為對任何實數 x 而言，每個包括 x 的開集都包括至少一個有理數。例如如果設定 $x_1=\sqrt{2}$ 和 $U_2=(\sqrt{2}-0.001,\sqrt{2}+0.001)$，那麼 $1.414\in U_2$，而 1.414 是有理數。

第二條可數性公理是說，拓樸空間 X 有可數的稠密子集，我們把滿足這條公理的空間稱為可分(separable) 空間[1]。很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是可分的。舉例說，根據上段的討論，$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集，而 $\mathbb{Q}$ 是可數集，由此可見 $\mathbb{R}$ 有可數的稠密子集，因此 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$

[1]請注意此一性質雖名為「可分」，但卻是「可數性公理」下的性質，而非「分離公理」下的性質。

是可分空間。

但也有並非可分的拓樸空間，設 $(X, \mathcal{P}(X))$ 為非空的離散拓樸空間，這個拓樸空間以 X 的冪集 $\mathcal{P}(X)$ 作為其拓樸，這表示 X 的任何子集都是 X 上的開集。接著證明 X 除了自身外，沒有其他稠密子集。首先，容易看到對 X 中每個元素 x 而言，每個包括 x 的開集 U 都包括至少一個 X 的元素 (例如 x)，所以 X 必然是自身的稠密子集。其次，設 S 是 X 的真子集，由於 X 非空，故必有 $x \in X - S$，即 $x \notin S$。現考慮 $\{x\}$，這個集合是 X 上包括 x 的開集，而且並不包括 S 的任何元素，因此 S 不是 X 的稠密子集，至此證得 X 的任何真子集都不是 X 的稠密子集。現在如果 X 是可數集，那麼 X 就是自身的可數稠密子集，否則 X 沒有可數稠密子集，即 $(X, \mathcal{P}(X))$ 是可分的當且僅當 X 是可數集。由於 $\mathbb{R}$ 是不可數集，由此可知 $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 不是可分空間。

第三條可數性公理是說，拓樸空間 $(X, \mathcal{T})$ 有可數的拓樸基 $\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{B}$ 生成的拓樸，我們把滿足這條公理的空間稱為第二可數(second-countable) 空間。很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是第二可數的。以下讓我們證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 是第二可數的。如前所述，全體開球組成的集合 $\mathcal{B}_s$ (見 (2)) 構成 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 的拓樸基，但這個拓樸基不符合我們的要求，這是因為 $\mathcal{B}_s$ 的成員 $B(x, r)$ 取決於實數 x 和正實數 r，因而與有序對 (x, r) 存在一一對應關係，由此可見 $\mathcal{B}_s$ 是不可數集。

不過，我們可以為 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 另找一個符合我們要求的拓樸基，例如以下集合：

$$\mathcal{B}_Q = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\} \qquad (6)$$

接著證明 $\mathcal{B}_Q$ 滿足在《數學示例：拓樸空間》中所提的拓樸基的兩個條件。(i) 對任何實數 x，顯然有 $\mathcal{B}_Q$ 中某個區間 (a, b) 使得 $x \in (a, b)$。(ii) 對 $\mathcal{B}_Q$ 中任意兩個區間 (a, b) 和 (c, d) 而言，若 $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$，那麼 $(a, b) \cap (c, d)$ 顯然也是 $\mathcal{B}_Q$ 的成員。因此對任何實數 x 而言，若 $x \in (a, b) \cap (c, d)$，其中 (a, b) 和 (c, d) 是 $\mathcal{B}_Q$ 的成員，那麼必有 $\mathcal{B}_Q$ 的成員 $(a, b) \cap (c, d)$，使得 $x \in (a, b) \cap (c, d)$ 並且 $(a, b) \cap (c, d) \subseteq (a, b) \cap (c, d)$。另一方面，容易看到 $\mathcal{B}_Q$ 的每個成員 (a, b) 對應著有序對 (a, b)，因此 $\mathcal{B}_Q$ 與笛卡爾積 $\mathbb{Q}^2$ 的某個子集存在一一對應關係。由於 $\mathbb{Q}$ 是可數集，根據「定理 1(ii)」，可知 $\mathbb{Q}^2$ 是可數集；由此再根據「定理 1(i)」，可知 $\mathcal{B}_Q$ 也是可數集。至此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 有一個可數拓樸基 $\mathcal{B}_Q$，因此是第二可數的。

以下定理表述了本文介紹的三種性質 (第一可數、可分和第二可數) 之間的關係。

定理 3：設 X 為拓樸空間。若 X 是第二可數的，則 X 也是第一可數和可分的。

舉例說，前面已證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 是第二可數的，因此根據上述定理，可知 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 也是第一可數和可分的，這與前面的討論結果一致。

不過，上述定理的逆命題卻不成立，即存在第一可數和可分但非第二可數的拓樸空間。舉例說，以下拓樸空間便是第一可數空間和可分空間但卻非第二可數空間：$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$，其中 $\mathcal{T}_l$ 是由以下拓樸基生成的拓樸：

$$\mathcal{B}_l = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

上述定義的 $\mathcal{T}_l$ 稱為下限拓樸(lower limit topology)，例如半閉半開區間 $[-3, -2)$、$[0, 1)$ 以及它們的并集 $[-3, -2) \cup [0, 1)$ 都是 $\mathcal{T}_l$ 的成員。另外，由於 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-3 + \frac{1}{n}, -2) = (-3, -2)$，所以開區間 $(-3, -2)$ 也是 $\mathcal{T}_l$ 的成員。

以下讓我們證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 確有上述性質。首先，就任何實數 x，定義以下可數集合：

$$\mathcal{L}_x''' = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) : n \ \in \mathbb{N} \right\}$$

如果 U 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 上包括 x 的開集，那麼根據《數學示例：拓樸空間》中的「定理 1」，U 等於 $\mathcal{B}_l$ 中某些成員的并集，其中必有至少一個成員 $[a, b)$ 包括 x。現在選取足夠大的 n 使得 $x + \frac{1}{n} \leq b$，那麼我們有 $x \in [x, x + \frac{1}{n}) \subseteq [a, b) \subseteq U$，因此 $\mathcal{L}_x'''$ 是 x 的可數局部基。至此證得任何實數都有一個可數局部基，因此 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 是第一可數的。

其次，容易看到在下限拓樸下，$\mathbb{Q}$ 也是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集，這是因為對任何實數 x 而言，$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 上每個包括 x 的開集都包括至少一個有理數。例如如果設定 $x_1 = \sqrt{2}$ 和 $U_3 = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 0.001)$，那麼 $1.415 \in U_3$，而 1.415 是有理數。由此證得 $\mathbb{R}$ 有一個可數的稠密子集，因此 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 是可分的。

接著證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 沒有可數拓樸基。請注意雖然我們在前面指出 $\mathcal{T}_l$ 是由拓樸基 $\mathcal{B}_l$ 生成的拓樸，而且 $\mathcal{B}_l$ 是不可數的，但由於同一個拓樸可以由不同的拓樸基生成，這並不排除 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 可以有另一個可數的拓樸基，故假設 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 有另一個拓樸基 $\mathcal{B}_l$'，由此根據「定理 2(i)」，可以為每個實數 x 找到一個局部基 $\mathcal{L}_x$。由於 $[x, x+1)$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 上包括 x 的開集，根據局部基的定義，可知必有 $\mathcal{L}_x$ 的某個成員 L_x 使得 $x \in L_x \subseteq [x, x+1)$。現在我們證明

$$x = \inf L_x \qquad (7)$$

根據「下確界」(infimum) 的定義，上式的意思是 (i) x 是 L_x 的下界 (即 x 小於或等於 L_x 的任何元素)；(ii) 如果 y 也是 L_x 的下界，則 $y \leq x$。接著用反證法逐一證明以上的 (i) 和 (ii)。首先，如果 (i) 不成立，那麼便有 L_x

的某個元素小於 x，但這麼一來，便不可能有 $L_x \subseteq [x, x+1)$。其次，如果 (ii) 不成立，那麼便有 L_x 的某個下界 y 使得 $x < y$。但這麼一來，x 便小於 L_x 的任何元素，不可能有 $x \in L_x$。至此證得 (7) 必真，因此若 $x \neq y$，則 $\inf L_x \neq \inf L_y$，因而 L_x 與 L_y 不是相同的集合。由此可進一步推知，對應著每個實數 x 的局部基 $\mathcal{L}_x$ 是各不相同的，即存在不可數無窮多個局部基。由於這些局部基是根據「定理 2(i)」從 $\mathcal{B}_l$' 求得的，可知 $\mathcal{B}_l$' 必定是不可數集。至此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 沒有可數拓樸基,即 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ 不是第二可數的。

本文和《數學示例：分離公理》一文介紹了多種空間，在這些空間中，「正則豪斯多夫空間」和「第二可數空間」有一個重要理論意義，其中正則豪斯多夫空間具有以下性質：其任何有限子集均為閉集，並且對其任何元素 x 和其上任何不包括 x 的閉集 C 而言，均有其上兩個開集 U 和 V，使得 $x \in U \wedge C \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset$，我們在上述網頁中指出了 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 是正則豪斯多夫空間。

在介紹上述兩類空間的理論意義前，須先引入「可賦距空間」的概念。我們在《數學示例：距離空間》中介紹了「距離空間」(X, d)，這是指一個集合 X 連同其上的距離函數 d 所形成的數學結構，而 d 須滿足一系列公理。此外，我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了如何利用 d 定義 (X, d) 上的開球 $B_d(c, r) = \{x \in X : d(x, c) < r\}$ (即該網頁的公式 (5))，並指出 (X, d) 上的全體開球構成一個拓樸基 $\mathcal{B}_d$，由此根據該網頁的「定理 1」可生成 X 的一個拓樸 $\mathcal{T}_d$。以上事實可以總結為，給定一個距離空間 (X, d)，總可以得到一個與之同胚的拓樸空間 $(X, \mathcal{T}_d)$。

反過來，給定一個拓樸空間 $(X, \mathcal{T})$，如果可以找到一個與之同胚的距離空間 (X, d)，即找到一個距離函數 d，使得 $\mathcal{T}$ 等於由拓樸基 $\mathcal{B}_d$ 生成的拓樸，我們便說 X 是可賦距(metrizable) 空間[2]。舉例說，$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 便是可賦距的，因為 $\mathcal{T}_s$ 正是定義為由 $\mathbb{R}^n$ 中全體開球所組成的拓樸基生成的拓樸，而這些開球是由以下標準距離函數 d_s 定義的：

$$d_s((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}$$

此外，離散拓樸空間 $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$，其中 $X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$，也是可賦距的，這是因為我們可以定義以下距離函數：

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 0 & 若 x = y \\ 1 & 若 x \neq y \end{cases}$$

讀者可自行驗證，根據以上函數，可以求得以下開球：若 $0 < r \leq 1$，則 $B_{d_1}(\spadesuit, r) = \{\spadesuit\}$ 和 $B_{d_1}(\heartsuit, r) = \{\heartsuit\}$；若 $r > 1$，則 $B_{d_1}(\spadesuit, r) = B_{d_1}(\heartsuit, r) =$

[2]請注意有些人把“metric”譯作「度量」，因而相應地把“metrizable”譯作「可度量化」。

$\{\spadesuit, \heartsuit\}$。容易看到，由這些開球生成的拓樸正好等於 $\mathcal{P}(X_1)$。

但並非所有拓樸空間都是可賦距的。考慮密著拓樸空間 $(X_1, \{X_1, \emptyset\})$，這個空間只有兩個開集：$X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$ 本身和 $\emptyset$。如果這個空間是可賦距的，那麼必有一個距離函數 d_2 使得 $\{X_1, \emptyset\}$ 等於由拓樸基 $\mathcal{B}_{d_2}$ 生成的拓樸。設 $r = d_2(\spadesuit, \heartsuit)$，由於 $\spadesuit \neq \heartsuit$，根據距離函數所須滿足的公理 (請參閱《數學示例：距離空間》)，我們有 $r > 0$。由此必有 $B_{d_2}(\spadesuit, r) = \{\spadesuit\}$。由於 $B_{d_2}(\spadesuit, r)$ 是開球，它是 $\mathcal{B}_{d_2}$ 的成員，因此理應屬於拓樸 $\{X_1, \emptyset\}$，但 $\{\spadesuit\} \notin \{X_1, \emptyset\}$。上述矛盾顯示 $(X_1, \{X_1, \emptyset\})$ 不可能是可賦距空間。

以下定理提供可賦距空間的充分條件。

定理 3 (烏雷松賦距定理Urysohn Metrization Theorem)：設 X 為拓樸空間。若 X 是正則豪斯多夫和第二可數空間，則 X 是可賦距的。

根據上述定理和前面的討論結果，由於 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 是正則豪斯多夫和第二可數空間，可知這個拓樸空間是可賦距的，這與前面得到的結果一致。此外，前面討論過的離散拓樸空間 $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$ 是正則豪斯多夫空間，這是因為 X_1 的任何子集在 $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$ 中既是開集也是閉集，因此 X_1 自然滿足正則豪斯多夫空間的定義；而且 $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$ 也是第二可數的，例如 $\{\{\spadesuit\}, \{\heartsuit\}\}$ 便是這個拓樸空間的一個可數拓樸基。由此根據上述定理，可知 $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$ 是可賦距的，這也與前面得到的結果一致。

惟請注意，「定理 3」所提供的只是可賦距空間的充分條件，而非必要條件，這即是說，如果 X 不是正則豪斯多夫和第二可數空間，X 仍有可能是可賦距空間。為得到可賦距空間的充分必要條件，我們必須修改「正則豪斯多夫和第二可數空間」此一條件。由於這涉及頗複雜的概念，本文不擬作進一步的討論。

連結至數學專題
連結至周家發網頁