數學示例：餘向量與 1 形式

我們在《數學示例：向量與向量場》中介紹了向量、切空間、切叢和向量場的概念，本文主旨是從這些概念進一步引入「餘向量」、「餘切空間」、「餘切叢」和「微分 1 形式」(簡稱「1 形式」) 的概念。在以下討論中，我們考慮的向量空間都是有限維向量空間。

餘向量(covector) 又稱「線性泛函」(linear functional)，是指把某向量空間 V 映射到 $\mathbb{R}$ 的線性函數 α。我們在《數學示例：線性泛函》中詳細介紹了線性泛函，簡言之，$\alpha : V \to \mathbb{R}$ 是線性泛函，若對任何 $v, w \in V$，$c \in \mathbb{R}$，α 都具有以下性質：

$$\alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w) \qquad (1)$$

$$\alpha(cv) = c\alpha(v) \qquad (2)$$

舉例說，以下兩個函數都是把 $\mathbb{R}^3$ 映射到 $\mathbb{R}$ 的餘向量：

$$\alpha_I([v_1, v_2, v_3]^T) = v_2 + 2v_3 \qquad (3)$$

$$\alpha_{II}([v_1, v_2, v_3]^T) = 3v_1 + 4v_2 + 5v_3 \qquad (4)$$

讀者可自行驗證餘向量，α_I 和 α_{II} 的確滿足 (1) 和 (2)。

根據以上的討論，對應每個向量空間 V，都有把 V 映射到 $\mathbb{R}$ 的餘向量。沿用我們在《數學示例：線性泛函》中引入的符號 (見該網頁的註 2)，我們把這些餘向量 (亦即線性泛函) 組成的集合記作 V^*。有趣的是，V^* 本身又構成一個向量空間，這個空間中的向量就是餘向量。為區分一般向量空間與由餘向量構成的空間，以下把由餘向量構成的空間稱為餘向量空間(covector space)(又稱「代數對偶空間」(algebraic dual space))，這個空間上的加法和純量乘法可如下定義。設 $\alpha, \beta \in V^*$，$c \in \mathbb{R}$，則 $\alpha + \beta$ 和 $c\alpha$ 是滿足以下等式的函數：對任何 $v \in V$，均有

$$(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v) \qquad (5)$$

$$(c\alpha)(v) = c\alpha(v) \qquad (6)$$

以前面討論過的 $\alpha_I, \alpha_{II} \in (\mathbb{R}^3)^*$ 為例，根據上述定義，$\alpha_I + \alpha_{II}$ 和 $-3\alpha_I$ 是滿足以下定義的餘向量：

$$(\alpha_I + \alpha_{II})([v_1, v_2, v_3]^T) = 3v_1 + 5v_2 + 7v_3$$

$$-3\alpha_I([v_1, v_2, v_3]^T) = -3v_2 - 6v_3$$

可以證明，V^* 的元素在 (5) 和 (6) 所定義的加法和純量乘法下，的確滿足向量空間的公理。

如同向量空間 V，餘向量空間 V^* 也有其有序基底。設 V 為 n 維向量空間，並且其有序基底為 $B = (e_1, \ldots, e_n)$，那麼 V^* 的一個有序基底是 $B^* = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$，這裡 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in V^*$，即 ϵ_i $(1 \leq i \leq n)$ 本身也是餘向量，而且這些餘向量滿足下式：

$$\epsilon_i(e_j) = \delta_{ij} \ \ (1 \leq i, j \leq n) \qquad (7)$$

在上式中，δ_{ij} 稱為克羅內克 δ 函數(Kronecker delta)，在流形分析、黎曼幾何等學科中有廣泛應用，其定義如下：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 若 i = j \\ 0 & 若 i \neq j \end{cases} \qquad (8)$$

綜合 (7) 和 (8)，若 $i = j$，則 $\epsilon_i(e_j) = 1$，否則 $\epsilon_i(e_j) = 0$。

可以證明 B^* 起著一般有序基底的作用，即 V^* 中任何成員 α 都可唯一地表示成以下線性組合：

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \epsilon_i \qquad (9)$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$，是 α 相對於 ϵ_i 的分量。由於 B^* 也包含 n 個成員，因此 V^* 跟 V 一樣是 n 維向量空間。

請注意 (7) 雖然只告訴我們各個基底餘向量 ϵ_i 對各個基底向量 e_j 作用的結果，但由於 V 中的任意向量 v 可以寫成線性組合 $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ 的形式，我們可以透過下式求任意餘向量 α 對任意向量 v 作用的結果：

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \epsilon_i \left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i \right) \qquad (10)$$

根據餘向量作為線性泛函的線性性質 (即 (1) 和 (2)) 以及作為向量空間成員的線性性質 (即 (5) 和 (6))，在計算上式時，只須把每個 ϵ_i 作用於

每個 e_j 並乘以 α_i 和 v_j (請注意 α_i 和 v_j 都是實數), 然後把各個結果加起來。

以 $\mathbb{R}^3$ 為例, 我們在《數學示例：向量與向量場》中指出 ($e_1 = [1,0,0]^T, e_2 = [0,1,0]^T, e_3 = [0,0,1]^T$) 構成 $\mathbb{R}^3$ 的一個有序基底。類似地，$(\mathbb{R}^3)^*$ 也有一個有序基底 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$，這個有序基底的成員滿足 (7) 和 (8) 的定義，即

$$\begin{array}{lll} \epsilon_1(e_1) = 1 & \epsilon_1(e_2) = 0 & \epsilon_1(e_3) = 0 \\ \epsilon_2(e_1) = 0 & \epsilon_2(e_2) = 1 & \epsilon_2(e_3) = 0 \\ \epsilon_3(e_1) = 0 & \epsilon_3(e_2) = 0 & \epsilon_3(e_3) = 1 \end{array}$$

利用上式以及 ϵ_i $(1 \leq i \leq 3)$ 作為線性泛函的線性性質 (1) 和 (2)，便可確定 ϵ_i 作用於 $\mathbb{R}^3$ 中任意元素的結果。舉例說，以下是求 $\epsilon_1([-1,-2,-3]^T)$ 的步驟：

$$\begin{aligned} \epsilon_1([-1,-2,-3]^T) &= \epsilon_1(-e_1 - 2e_2 - 3e_3) \\ &= -\epsilon_1(e_1) - 2\epsilon_1(e_2) - 3\epsilon_1(e_3) \\ &= -1 \times 1 - 2 \times 0 - 3 \times 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

容易看到，可以把以上計算結果推廣到一般情況：

$$\epsilon_1([v_1, v_2, v_3]^T) = v_1$$

此外，還有以下結果：

$$\begin{aligned} \epsilon_2([v_1, v_2, v_3]^T) &= v_2 \\ \epsilon_3([v_1, v_2, v_3]^T) &= v_3 \end{aligned}$$

由此可見，把 ϵ_i 作用於 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量，所得結果是該向量的第 i 個分量。

由於 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 是有序基底，$(\mathbb{R}^3)^*$ 中的任何餘向量都可唯一地表示成 (9) 那樣的線性組合。另一方面，可以證明 (9) 中的分量 α_i 可用下式求得：

$$\alpha_i = \alpha(e_i) \qquad (11)$$

以前面討論過的 α_I 為例，根據 (11)，我們有

$$\begin{array}{lllll} (\alpha_I)_1 &=& \alpha_I([1,0,0]^T) &=& 0 \\ (\alpha_I)_2 &=& \alpha_I([0,1,0]^T) &=& 1 \\ (\alpha_I)_3 &=& \alpha_I([0,0,1]^T) &=& 2 \end{array}$$

由此根據 (9)，可把 α_I 寫成以下形式：

$$\begin{aligned}\alpha_I &= 0\times\epsilon_1+1\times\epsilon_2+2\times\epsilon_3\\ &= \epsilon_2+2\epsilon_3\end{aligned}$$

讀者可自行驗證 α_{II} 可寫成以下形式：

$$\alpha_{II}=3\epsilon_1+4\epsilon_2+5\epsilon_3$$

類似向量的情況，餘向量除可表示成 (9) 所示的線性組合外，也可表示成以下 $1\times n$ 行矩陣：

$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$$

例如前述的兩個餘向量以及餘向量空間有序基底的三個成員便可分別表示成 $\alpha_I=[0,1,2]$、$\alpha_{II}=[3,4,5]$、$\epsilon_1=[1,0,0]$、$\epsilon_2=[0,1,0]$ 和 $\epsilon_3=[0,0,1]$。上述把向量和餘向量分別表示成列矩陣和行矩陣的優點是，可以把餘向量 α 對向量 v 的作用看成矩陣相乘的結果。具體地說，如把 α 寫成 $1\times n$ 行矩陣，v 寫成 $n\times 1$ 列矩陣，則 $\alpha(v)$ 等於把上述兩個矩陣相乘所得 1×1 矩陣中的唯一實數。舉例說，根據 (3)，把 α_I 作用於 $[-1,-2,-3]^T$，可得

$$\alpha_I([-1,-2,-3]^T)=-8$$

此一結果正好對應以下矩陣乘法的結果：

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\end{bmatrix}$$

以上是有關一般向量空間上的餘向量的知識，但在流形分析中，我們並不研究所有餘向量，而是集中研究以切向量作為輸入的餘向量。根據我們在《數學示例：向量與向量場》的討論，給定流形 M，它的每一點 p 處都「寄生」著眾多切向量，這些切向量構成 p 點處的一個向量空間，稱為「切空間」，記作 T_pM。引入餘向量概念後，我們看到 M 的每一點 p 處其實不僅「寄生」著眾多切向量，而且還「寄生」著以這些切向量作為輸入的眾多餘向量，這些餘向量可稱為餘切向量(cotangent vector)[1]，它們構成 p 點處的另一個向量空間，稱為餘切空間(cotangent space)，記作 T_p^*M。如同 T_pM 的情況，有時為了清晰區別「寄生」於不同點上的餘切向量，可以把 T_p^*M 中的餘切向量 α 寫成 α_p。

由於 T_p^*M 是向量空間，它有其有序基底。當然我們可以把這個有序基底寫成標準有序基底的形式，例如如果 T_p^*M 是 2 維向量空間，那麼其標

[1]請注意這裡的「餘切向量」跟三角函數中的「餘切」(cotangent) 是毫不相干的兩個概念。

準有序基底就是 $((\epsilon_1)_p = [1,0]_p, (\epsilon_2)_p = [0,1]_p)$。但在流形分析中，可以把這個有序基底寫成另一種形式。為此，我們首先定義M 上實值函數的外導數(exterior derivative of a real-valued function on M)[2]如下：設 f 為把 M 中的點映射為實數的函數，則 f 的外導數，記作 df，是一個把 T_pM 中的向量 v_p 映射為實數的函數，而且這個函數作用於 v_p 的結果正好等於 f 於 p 沿著 v 的方向導數[3]。根據我們在《數學示例：向量與向量場》中有關方向導數的公式 (2)，我們有

$$df(v_p) = v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p \qquad (12)$$

接著考慮以下「坐標函數」(coordinate function) (在下式中，x 是流形 M 上的點，其坐標為 (x_1, x_2))[4]：

$$x_1(x) = x_1, \quad x_2(x) = x_2 \qquad (13)$$

從上式可見，x_i $(1 \le i \le 2)$ 是把 M 中的點映射為其第 i 個坐標的函數[5]。從上式不難得出以下結果：

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1 \qquad (14)$$

由於 (12) 適用於任何把 M 的點映射為實數的函數，它應也適用於上述兩個坐標函數。把 x_1 和 x_2 代入 (12) 中的 f，並應用上述結果，可得

$$\begin{aligned} dx_1(v_p) &= v_1 \left.\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right|_p \\ &= v_1 \\ dx_2(v_p) &= v_1 \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right|_p \\ &= v_2 \end{aligned}$$

上述結果顯示，把 dx_i $(1 \le i \le 2)$ 作用於向量 v_p，所得結果是 v_p 的第 i 個分量，即 dx_i 與前面的 ϵ_i 起著完全相同的作用，由此可得以下重要等式：

$$\epsilon_1 = dx_1, \quad \epsilon_2 = dx_2 \qquad (15)$$

[2]「外導數」是流形分析的重要課題，我們會以專文介紹此課題 (請參閱合《數學示例：外導數》)。但為引入餘切空間的有序基底，這裡先簡單介紹「M 上實值函數的外導數」的概念。

[3]請注意綜合《數學示例：向量與向量場》和本文，我們看到「f 於 p 沿著 v 的方向導數」至少有三種表示法：$D_v f(p)$、$v_p[f]$ 和 $df(v_p)$。

[4]在流形分析中，x_i 既用來代表坐標函數，也用來代表點的坐標，但根據上下文，應不會引致混淆。

[5]請不要把這裡的 x_i 與前面的 ϵ_i 混淆，儘管這兩者有很相似的作用：x_i 是作用於「點」並輸出其第 i 個「坐標」的函數，而 ϵ_i 則是作用於「向量」並輸出其第 i 個「分量」的函數。

至此我們看到，如果引入前述坐標函數和函數外導數的概念，那麼可以把 2 維餘切空間 T_p^*M 的有序基底寫成 $((dx_1)_p, (dx_2)_p)$ 的形式。

容易把上述結果推廣到 m 維的情況：設 M 為 m 維流形，則 T_p^*M 的有序基底可寫成 $((dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p)$ 的形式。給定上述有序基底，可以把 T_p^*M 中的餘切向量 α_p 表示成以下行矩陣形式：

$$\alpha_p = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]_p \qquad (16)$$

也可表示成以下線性組合的形式：

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (dx_i)_p \qquad (17)$$

在以上兩式中，$\alpha_i \in \mathbb{R}$ 是 α_p 相對於 $(dx_i)_p$ 的分量。

綜合本文和《數學示例：向量與向量場》，我們看到切空間 T_pM 和餘切空間 T_p^*M 的有序基底成員可分別寫成 $\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$ 和 $(dx_i)_p$，而這兩者具有以下關係[6]：

$$(dx_i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \delta_{ij} \;\; (1 \le i, j \le m) \qquad (18)$$

接下來讓我們用一個實例說明上述概念，考慮 2 維流形 $\mathbb{R}^2$ 及其上的點 $(1, 3)$。如前所述，$(1, 3)$ 點處同時「寄生」著切空間 $T_{(1,3)}\mathbb{R}^2$ 和餘切空間 $T^*_{(1,3)}\mathbb{R}^2$。現設有 $T_{(1,3)}\mathbb{R}^2$ 中的以下向量：

$$(v_{III})_{(1,3)} = 2 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3)} - 4 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3)} \qquad (19)$$

和 $T^*_{(1,3)}\mathbb{R}^2$ 中的以下餘切向量：

$$(\alpha_{III})_{(1,3)} = -(dx_1)_{(1,3)} + 3(dx_2)_{(1,3)} \qquad (20)$$

根據餘切向量的定義，可以把 $(\alpha_{III})_{(1,3)}$ 作用於 $(v_{III})_{(1,3)}$，並得到一個實數。為求這個實數，要應用 $(\alpha_{III})_{(1,3)}$ 的線性性質以及 (18)，其計算步驟如下：

$$(\alpha_{III})_{(1,3)} \left((v_{III})_{(1,3)} \right)$$

[6]請注意 (18) 其實等於前面的 (7)，只不過把該等式中的 ϵ_i、e_j 和 n 分別改為 $(dx_i)_p$、$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$ 和 m 而已。

$$
\begin{aligned}
&= \left(-(dx_1)_{(1,3)} + 3(dx_2)_{(1,3)}\right)\left(2\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3)} - 4\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3)}\right) \\
&= -2(dx_1)_{(1,3)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3)}\right) + 4(dx_1)_{(1,3)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3)}\right) \\
&\quad +6(dx_2)_{(1,3)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3)}\right) - 12(dx_2)_{(1,3)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3)}\right) \\
&= -2(1) + 4(0) + 6(0) - 12(1) \\
&= -14
\end{aligned}
$$

有趣的是，如果把上述 $(\alpha_{III})_{(1,3)}$ 和 $(v_{III})_{(1,3)}$ 分別寫成行矩陣 $[-1, 3]$ 和列矩陣 $[2, -4]^T$ 的形式，那麼 $(\alpha_{III})_{(1,3)}((v_{III})_{(1,3)})$ 的結果正好對應上述兩個矩陣的乘積：

$$
\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \end{bmatrix}
$$

如前所述，流形 M 的每一點 p 處都有一個餘切空間 T_p^*M。現在如果把所有點處的餘切空間的所有成員組成一個集合，便可得到 M 的餘切叢(cotangent bundle)，記作 T^*M，即

$$
T^*M = \{\alpha_p \in T_p^*M : p \in M\} \qquad (21)
$$

舉例說，前面討論過的 $[-1, 3]_{(1,3)}$ 是餘切空間 $T^*_{(1,3)}\mathbb{R}^2$ 的成員，$[-1, 3]$ 當然也可以是另一個餘切空間 $T^*_{(2,2)}\mathbb{R}^2$ 的成員 (在此情況下要寫作 $[-1, 3]_{(2,2)}$)。此外，這兩個餘切空間當然還可以有其他成員，例如 $[2, 4]_{(1,3)}$、$[2, 4]_{(2,2)}$ 等等。$\mathbb{R}^2$ 有無窮無盡的餘切空間，而每個餘切空間又有無窮無盡的成員。如把所有這些餘切空間的所有成員組成一個集合，便可得到餘切叢 $T^*\mathbb{R}^2$，以下是這個餘切叢的其中四個成員：

$$
T^*\mathbb{R}^2 = \{[-1, 3]_{(1,3)}, [2, 4]_{(1,3)}, [-1, 3]_{(2,2)}, [2, 4]_{(2,2)}, \ldots\}
$$

從餘切叢可以進一步得到微分 1 形式的概念。設 M 為流形，則 M 上的微分 1 形式(differential 1-form) 是指以下函數：

$$
\alpha : M \to T^*M; \;\; \alpha(x) \in T_x^*M \qquad (22)
$$

根據上式，α 這個函數以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出餘切叢 T^*M 的某個成員；但 $\alpha(x)$ 並非 T^*M 的任意成員，而是必須滿足條件 $\alpha(x) \in T_x^*M$，即 $\alpha(x)$ 必須是 M 於 x 點處的餘切空間 T_x^*M 中的某個餘向量。把上式與《數學示例：向量與向量場》中的 (10) 比較，可以看到微分 1 形式與餘向量的關係類似向量場與向量的關係，因此微分 1 形式其實就是「餘向量場」。

類似向量場的情況，以下將使用相同的符號 α 來代表「餘向量」和「微分 1 形式」，根據上下文，應不會引致混淆。

從上述定義可見，微分 1 形式 α 不是把 M 映射到 T^*M 的任意函數，而是必須滿足 (22) 所示的條件。α 對 T^*M 的此一特殊關係就是我們在《數學示例：向量與向量場》曾經提過的截面關係，即微分 1 形式是餘切叢的一個截面，因此根據該網頁，可以把流形 M 上所有微分 1 形式組成的集合記作 $\Gamma(T^*M)$[7]。

若 M 是 m 維流形，那麼微分 1 形式的輸出值是一個 m 維餘向量，因此可以採取餘向量的前述兩種表示形式：

$$\alpha(x) = [\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x)]_x \tag{23}$$

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)(dx_i)_x \tag{24}$$

以上兩式跟 (16) 和 (17) 非常相似，所不同者僅在於前者中的 α、α_i $(1 \leq i \leq m)$ 等帶有可變論元 x，顯示這是函數 (即微分 1 形式)，而後者中的 α 等則帶有固定下標 p，顯示這是單個的餘向量。

以下是 $\mathbb{R}^2$ 上微分 1 形式的例子：

$$\alpha_{IV}(x_1, x_2) = [2x_1 - x_2, x_1x_2]_{(x_1,x_2)} = (2x_1 - x_2)(dx_1)_{(x_1,x_2)} + x_1x_2(dx_2)_{(x_1,x_2)} \tag{25}$$

如把上述函數作用於點 $(1, 3)$，可得 $\alpha_{IV}(1, 3) = -(dx_1)_{(1,3)} + 3(dx_2)_{(1,3)}$，此即前面討論過的 $T^*_{(1,3)}\mathbb{R}^2$ 中的餘切向量 $(\alpha_{III})_{(1,3)}$ (見 (20))。如把上述函數作用於其他點，便可得到其他點處的餘切空間中的餘切向量，例如 $\alpha_{IV}(2, 2) = 2(dx_1)_{(2,2)} + 4(dx_2)_{(2,2)}$，這是 $T^*_{(2,2)}\mathbb{R}^2$ 中的餘切向量。

餘向量是一種作用於向量的函數，因此微分 1 形式 α 可被看成一個「二重函數」。如把 α 先作用於點 p，其結果 $\alpha(p)$ 是某一餘向量；如再把 $\alpha(p)$ 作用於向量 v_p，其結果 $\alpha(p)(v_p)$ 是某一實數。以 α_{IV} 為例，根據前面的計算結果，把這個微分 1 形式先後作用於點 $(2, 2)$ 和以下向量：

$$(v_{IV})_{(2,2)} = 3 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(2,2)} - 6 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(2,2)} \tag{26}$$

[7] 現把本文介紹的四類集合及其符號總結如下：M 是某流形上所有點組成的集合，T^*_pM 是 M 於 p 點處所有餘切向量組成的集合，T^*M 是 M 各點處所有餘切向量組成的集合，$\Gamma(T^*M)$ 是 M 上所有微分 1 形式組成的集合。

可得

$$
\begin{aligned}
& \alpha_{IV}(2,2)\left((v_{IV})_{(2,2)}\right) \\
= \quad & \left(2(dx_1)_{(2,2)} + 4(dx_2)_{(2,2)}\right)\left(3\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(2,2)} - 6\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(2,2)}\right) \\
= \quad & -18
\end{aligned}
$$

不過，我們也可以保留 x 的可變點地位，並把 α 作用於向量場 v，其結果 $\alpha(v)(x)$ 是一個隨著 x 而變化的實值函數；如再把這個函數作用於點 p，其結果 $\alpha(v)(p)$ 是某一實數。仍以 α_{IV} 為例，把這個微分 1 形式作用於以下向量場：

$$
v_V(x_1,x_2) = ({x_1}^2 - 1)\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(x_1,x_2)} - 3x_2\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2)} \tag{27}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
& \alpha_{IV}(v_V)(x_1,x_2) \\
= \quad & (2x_1 - x_2)(dx_1)_{(x_1,x_2)} + x_1x_2(dx_2)_{(x_1,x_2)}\left(({x_1}^2 - 1)\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(x_1,x_2)} - 3x_2\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2)}\right) \\
= \quad & 2{x_1}^3 - {x_1}^2x_2 - 3x_1{x_2}^2 - 2x_1 + x_2
\end{aligned}
$$

接著如把上述結果作用於點 $(2,2)$，所得結果為

$$
\begin{aligned}
& \alpha_{IV}(v_V)(2,2) \\
= \quad & (2)(2^3) - (2^2)(2) - (3)(2)(2^2) - (2)(2) + 2 \\
= \quad & -18
\end{aligned}
$$

上述計算結果跟前面求得的 $\alpha_{IV}(2,2)((v_{IV})_{(2,2)})$ 一致，這並不奇怪，因為讀者可自行驗證，$v_V(2,2)$ 正好等於 $(v_{IV})_{(2,2)}$。

在結束本文前，須再補充一點。我們在前面曾指出，餘向量是以 V 中向量為論元的實值函數。現在我們可以進一步考慮以餘向量為論元的實值函數，此即「餘餘向量」(co-covector)，而由餘餘向量組成的集合可記作 V^{**}。可是，根據泛函分析的知識，如果 V 是有限維向量空間，那麼 V^{**} 與 V 同構，因此我們可以把向量看成等同於餘餘向量，即以餘向量為論元的實值函數。這樣向量與餘向量的關係便是對稱的，給定向量 v 和餘向量 α，既可求 α 對 v 的作用，也可求 v 對 α 的作用，而且這兩者的值相等，即

$$
\alpha(v) = v(\alpha)
$$

上述對稱關係也適用於向量場與微分 1 形式，即給定向量場 v 和微分 1 形式 α，既可求 $\alpha(v)$，也可求 $v(\alpha)$，而且這兩者的值相等。

以前面討論過的向量 $[-1, -2, -3]^T$ 和餘向量 α_I 為例，我們除可求 $\alpha_I([-1, -2, -3]^T)$ 外，也可反過來求 $[-1, -2, -3]^T(\alpha_I)$，而且有

$$\begin{aligned} [-1, -2, -3]^T(\alpha_I) &= \alpha_I([-1, -2, -3]^T) \\ &= -8 \end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁