數學示例：曲線的參數化

在中學時代學過微積分 (又稱數學分析) 的讀者應知道，微積分此一數學工具可用來求平面曲線於某一點的切線的斜率，也可用來求某些平面圖形的面積以至旋轉體的體積，但微積分在幾何學上的用途遠不只此。事實上，微積分在幾何學上的應用構成了一整個數學學科－「微分幾何」的內容。我們將從簡單的幾何圖形－曲線開始介紹微分幾何的內容。但在介紹曲線的性質前，須先介紹微分幾何中一種常用來表示曲線的方法－參數化，這是本章的主要內容。

首先考慮二維平面上的曲線 (這裡「曲線」的概念也包括直線)，學過解析幾何的讀者都知道平面曲線可用包含 x 和 y 這兩個變項的方程來表示，例如通過原點，斜率為 1 的直線可用 $y = x$ 來表示，而以原點為圓心，半徑為 r 的圓 (以下稱為「r 半徑圓」) 則可用 $x^2 + y^2 = r^2$ 來表示等等。除此以外，也可以把平面曲線看成一個運動點在二維平面上走過的軌跡。在此觀點下，可以把上述運動點表示成一個「參數」(parameter)，從而把上述平面曲線表示成以下參數化(parametrization) 形式 (亦稱「參數方程」parametric equation)：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad Z(t) = (x(t), y(t)) \qquad (1)$$

在上式中，D 代表一個實數集合 (常常表現為某個實數區間)，此即參數的取值範圍 (又稱「定義域」)。對應於每個參數值 $t \in D$，都有一個函數值 $Z(t)$，代表參數在二維平面上的軌跡。請注意 $Z(t)$ 是一個向量，它包含兩個分量 (component) － $x(t)$ 和 $y(t)$，這兩個分量是實值函數 x 和 y 的值。雖然 $Z(t)$ 本質上是向量，但在把 $Z(t)$ 看成運動點的軌跡時，我們一般只關注這個向量的末端的所在位置，這樣我們實際把 $Z(t)$ 看作平面上的點，而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 則是這點的 x 坐標和 y 坐標。

舉例說，前述的 $y = x$ 直線便可以表示成以下參數化形式：

$$Z_1 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2; \quad Z_1(t) = (t, t) \qquad (2)$$

根據上式，$Z_1(0) = (0, 0)$ 和 $Z_1(100) = (100, 100)$，這代表當參數值是 0 時，運動點在原點位置；當參數值是 100 時，運動點位於 $(100, 100)$ 的位置。由

此可見，當 t 取遍 $(-\infty, \infty)$ 上的值時，運動點走過的軌跡正是 $y = x$ 這條直線。同理，讀者可自行驗證，上述 r 半徑圓可以表示成以下參數化形式：

$$Z_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \ Z_2(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t)) \qquad (3)$$

一條曲線可以表示成多種不同參數化形式，以前述的 $y = x$ 直線和 r 半徑圓為例，它們除可表示成前面的 Z_1 和 Z_2 外，還可表示成以下參數化形式：

$$Z_3 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2;\ \ Z_3(t) = (t^3, t^3) \qquad (4)$$

$$Z_4 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \ Z_4(t) = (r\cos(2\pi t^2), r\sin(2\pi t^2)) \qquad (5)$$

由於上述參數化形式中的兩個分量可被看作點的 x 坐標和 y 坐標，這兩個坐標必須滿足曲線的原有方程。舉例說，如把上述 Z_4 的兩個分量 $r\cos(2\pi t^2)$ 和 $r\sin(2\pi t^2)$ 分別當作 x 和 y，那麼 x 和 y 的確滿足 r 半徑圓的原有方程 $x^2 + y^2 = r^2$，因為我們有

$$\begin{aligned}(r\cos(2\pi t^2))^2 + (r\sin(2\pi t^2))^2 &= r^2(\cos^2(2\pi t^2) + \sin^2(2\pi t^2)) \\ &= r^2\end{aligned}$$

為方便研究，微分幾何對參數化形式作出了一些限制。第一個限制是參數化形式必須是光滑(smooth) 的，用微積分語言來表述，就是上述 (1) 中的函數 Z 的兩個分量 x 和 y 都必須是無窮可微的，即它們都有任意階導數。第二個限制是參數化形式必須是正則(regular) 的，用微積分語言來表述，就是對定義域 D 中任何元素 t 而言，都有

$$Z\text{'}(t) = (x\text{'}(t), y\text{'}(t)) \neq (0, 0)$$

這裡 ’ 代表「一階導數」。

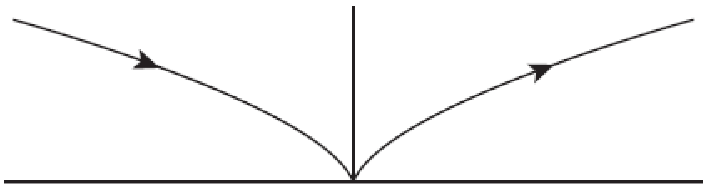
舉例說，前面 (2) — (5) 這四個參數化形式都是光滑的。此外，由於

$$\begin{aligned}Z_1\text{'}(t) &= (1, 1) \\ Z_2\text{'}(t) &= (-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t)) \\ Z_3\text{'}(t) &= (3t^2, 3t^2) \\ Z_4\text{'}(t) &= (-4\pi rt\sin(2\pi t^2), 4\pi rt\cos(2\pi t^2))\end{aligned}$$

$Z_1\text{'}(t)$ 和 $Z_2\text{'}(t)$ 永不等於 $(0, 0)$，因此 Z_1 和 Z_2 是正則的；但 $Z_3\text{'}(0) = (0, 0)$ 和 $Z_4\text{'}(0) = (0, 0)$，因此 Z_3 和 Z_4 不是正則的。上述計算顯示，在對 $y = x$ 直線和 r 半徑圓進行微分幾何研究時，應選擇 Z_1 和 Z_2 這類參數化形式，而非 Z_3 和 Z_4 這類參數化形式。

某些曲線不可能有光滑或正則的參數化形式，因而一般不在微分幾何的

研究範圍之內。舉例說，設 Z 為某不連續曲線的參數化形式，那麼 Z 的分量 x 和 y 必有至少一個是不連續函數。根據數學分析的知識，不連續函數必不可微，因而也必不光滑，因此不連續曲線的參數化形式不可能是光滑的。此外，某些包含尖角或尖端的曲線，例如下圖的曲線，不可能有正則參數化形式：



以下是上圖所示曲線的一個參數化形式：

$$Z_5 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2; \;\; Z_5(t) = (t^3, t^2)$$

讀者可自行驗證，上式是光滑但卻不是正則的。

此外，微分幾何有時還會採用一種建基於「速率」的參數化形式，這裡「速率」是借自力學的概念。如前所述，曲線可以看成某運動點的移動軌跡，因此在研究曲線時，可以借用力學的概念。在力學上，如果用 Z 代表「位移」(displacement)，那麼 Z' 便代表「速度」(velocity)。跟 Z 一樣，Z' 也是向量，如果取這個向量的「模」(modulus)，便會得到一個實數，稱為速率(speed)。根據線性代數的知識，如果 v 是向量，那麼 v 的模可以用 $\|v\|$ 來表示，而且如果 $v = (x, y)$，那麼 $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$。綜合以上討論，可以把具有參數化形式 (1) 的曲線的速率表示成

$$\|Z'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \qquad (6)$$

以 r 半徑圓為例，如沿用 (3) 所示的正則參數化形式 Z_2，那麼 Z_2 的速率可計算如下：

$$\begin{aligned}
\|Z_2'(t)\| &= \|(-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t))\| \\
&= \sqrt{(-2\pi r\sin(2\pi t))^2 + (2\pi r\cos(2\pi t))^2} \\
&= \sqrt{4\pi^2 r^2\left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right)} \\
&= 2\pi r
\end{aligned}$$

在某些情況下，微分幾何會採用具有單位速率(unit-speed) 性質的參數化形式，這是指其速率等於常數 1 的參數化形式。根據上述計算，Z_2 不是單位

速率的參數化形式。以下介紹如何把不是單位速率的參數化形式轉化為單位速率的參數化形式。

為此，須先引入弧長的概念。弧長(arc length) 是指曲線上可變點相距某一固定點的有向長度，此一「有向長度」可以是正數、零或負數，視乎可變點的參數值是大於、等於還是小於固定點的參數值。以下提供求弧長的公式。設某曲線具有 (1) 所示的參數化形式，$t_0, t \in D$，那麼 $Z(t_0)$ 和 $Z(t)$ 代表曲線上的某兩點。現設 $Z(t_0)$ 為曲線上的固定點，$Z(t)$ 為可變點，那麼 $Z(t)$ 相距 $Z(t_0)$ 的弧長可以表示成以下弧長函數：

$$s : D \to \mathbb{R};\;\; s(t) = \int_{t_0}^{t} \|Z\text{'}(u)\|\, du \qquad (7)$$

仍以 r 半徑圓為例，如沿用 Z_2 作為參數化形式，並以 0 作為固定點，那麼我們有

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|Z_2\text{'}(u)\|\, du \\ &= \int_0^t 2\pi r\, du \\ &= 2\pi r t \end{aligned}$$

因此 Z_2 從 0 到 1 的軌跡的弧長 (即 r 半徑圓的圓周) 等於 $2\pi r$，正是我們預期的結果。

用公式 (7) 求得弧長後，便可把原來以 t 作為參數的參數化形式 Z 轉化成以弧長 s 作為參數的新參數化形式，方法是把 (7) 看成 s 依賴於 t 的函數關係 (以下記作 $s(t)$)，由此推導出 t 依賴於 s 的逆向函數關係 (以下記作 $t(s)$)，然後利用 $s(t)$ 把 Z 原有的定義域 D 轉化成新的定義域，並把 $t(s)$ 代入 $Z(t)$ 中的 t，從而得到新的參數化形式，可以證明此一新參數化形式必然是單位速率的。

接下來示範如何用上述方法把前述的 Z_2 轉化成單位速率的參數化形式，根據前面的計算，我們有函數關係

$$s(t) = 2\pi r t \qquad (8)$$

這是 s 依賴於 t 的函數關係，由此可以推導出 t 依賴於 s 的逆向函數關係，即

$$t(s) = \frac{s}{2\pi r} \qquad (9)$$

根據 (8)，新參數 s 的值是原有參數 t 的值的 $2\pi r$ 倍，因此 Z_2 原有的定義域 $[0, 1]$ 應轉化成 $[0 \times 2\pi r, 1 \times 2\pi r]$，即 $[0, 2\pi r]$。另一方面，根據 (9)，我

們把 $\frac{s}{2\pi r}$ 代入 $Z_2(t)$ 中的 t，從而得到

$$\begin{aligned} & \left(r\cos\left(2\pi\times\frac{s}{2\pi r}\right), r\sin\left(2\pi\times\frac{s}{2\pi r}\right)\right) \\ = \quad & \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \end{aligned}$$

經以上轉換後，便得到以下新參數化形式：

$$Z_6 : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2;\;\; Z_6(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right) \qquad (10)$$

讀者可自行驗證，$\|Z_6\text{'}(s)\| = 1$，因此上述新參數化形式確是單位速率的參數化形式。讀者還可自行驗證，上述 $y = x$ 直線的參數化形式 Z_1 不是單位速率的參數化形式，但也可用上述方法轉化成以下單位速率的參數化形式 (為簡化計算結果，在利用 (7) 計算 Z_1 的弧長 s 時，應把 t_0 定為 0)：

$$Z_7 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2;\;\; Z_7(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \qquad (11)$$

事實上，可以證明上述方法可把任何光滑正則參數化形式轉化成以弧長 s 為參數的新參數化形式，所得結果都必定是單位速率的參數化形式。惟請注意，上述方法依賴於我們能夠用 (7) 計算出弧長，並且能由此推導出逆向函數關係 $t(s)$。可是，求積分運算和求逆函數都並非總是容易進行，因此上述方法只有理論上的意義，實際上只能應用於少數參數化形式。

採用單位速率的參數化形式的好處是可以簡化某些微分幾何公式。以弧長公式 (7) 為例，如果 Z 是某曲線單位速率的參數化形式，那麼 $\|Z\text{'}(t)\| = 1$，這樣 (7) 便化簡為

$$s : D \to \mathbb{R};\;\; s(t) = t - t_0 \qquad (12)$$

舉例說，由於 Z_6 是單位速率的參數化形式，因此根據上述公式，可知 r 半徑圓上從 $Z_6(0)$ (即 $(r, 0)$ 這點) 到 $Z_6(\pi r)$ (即 $(-r, 0)$ 這點) 的弧長是 $\pi r - 0 = \pi r$，正是 r 半徑圓圓周的一半。

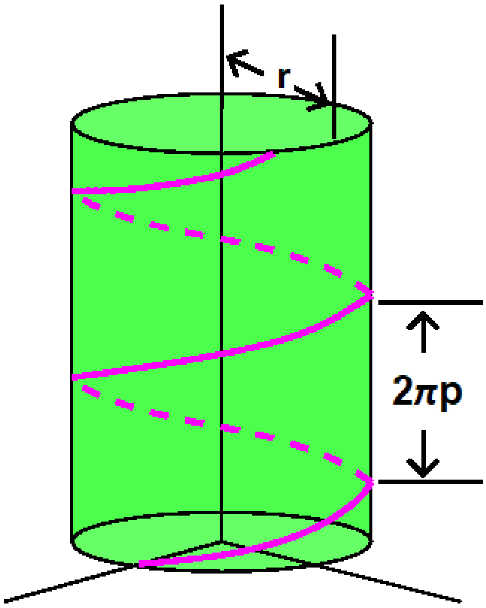
以上介紹的概念也適用於三維空間上的曲線。空間曲線也可表示成參數化形式，但與 (1) 不同，空間曲線的參數化形式的對應域是 $\mathbb{R}^3$，因此須包含三個分量，如下式所示：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\;\; Z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (13)$$

由於平面可以看成其 z 坐標恆為 0 的三維空間，前述的平面曲線全都可看成其 $z(t)$ 分量為常值零函數 (以下記作 0) 的空間曲線，例如 r 半徑圓的單位速率參數化形式 Z_6 便可寫成以下空間曲線參數化形式：

$$Z_8 : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^3;\;\; Z_8(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right) \qquad (14)$$

因此 r 半徑圓只是一種「退化」的空間曲線，接下來讓我們看一種「非退化」的空間曲線，這是下圖所示的「圓螺旋線」(circular helix)：



上述曲線可以用以下參數化形式表示 (在下式中，r 和 p 是正實數)：

$$Z_9 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3;\;\; Z_9(t) = (r\cos t, r\sin t, pt) \qquad (15)$$

如上圖所示，上式中的 r 是圓螺旋線所繞著的圓柱面的半徑，$2\pi p$ 則是圓螺旋線的「導程」(pitch),即圓螺旋線繞過圓柱面一周後該曲線垂直爬升的距離。

對於空間曲線，我們同樣可以討論其參數化形式是否光滑、正則和單位速率，其定義跟平面曲線相同，唯一不同是空間曲線參數化形式的速率公式不再是 (6)，而是比 (6) 略為複雜的公式：

$$\|Z'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \qquad (16)$$

以圓螺旋線為例，上述參數化形式 Z_9 顯然是光滑的，為確定它是否具有正則和單位速率的性質，先要用公式 (16) 計算其速率如下：

$$\begin{aligned} \|Z_9'(t)\| &= \|(-r\sin t, r\cos t, p)\| \\ &= \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{r^2 + p^2} \end{aligned}$$

由於 r 和 p 是正實數，上式必不等於 0 但不一定等於 1，因此 Z_9 是正則的，但它是否具有單位速率則要視乎 r 和 p 的具體數值而定，例如若

$r = p = \frac{1}{\sqrt{2}}$，則 Z_9 具有單位速率。

如要就任何 r 和 p 值求得圓螺旋線的單位速率參數化形式，可以沿用前面介紹的方法，首先用公式 (7) 求 Z_9 的弧長 (為簡化計算結果，以下把 t_0 定為 0)：

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|Z_9\text{'}(u)\|\, du \\ &= \int_0^t \sqrt{r^2+p^2}\, du \\ &= (\sqrt{r^2+p^2})t \end{aligned}$$

上式提供圓螺旋線上的點相距 $(r, 0, 0)$ 點 (即參數值 $t = 0$ 的那一點) 的弧長。舉例說，當圓螺旋線從 $(r, 0, 0)$ 點向上旋轉繞過圓柱面一周後，其參數值為 $t = 2\pi$，所走過的距離 (即弧長) 則是 $2\pi(\sqrt{r^2+p^2})$。請注意此一距離較圓柱面的圓周 $2\pi r$ 長，這是合理的，因為圓螺旋線在繞行一周的過程中，不僅進行圓周運動，還進行了垂直爬升運動。

從上述計算，我們有以下函數關係：

$$s(t) = (\sqrt{r^2+p^2})t \qquad (17)$$

由此可得以下逆函數關係：

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \qquad (18)$$

根據 (17)，Z_9 的原有定義域在新參數 s 下仍為 $(-\infty, \infty)$。另一方面，根據 (18)，我們把 $\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}$ 代入 $Z_9(t)$ 中的 t，便可得到以下新參數化形式：

$$\begin{aligned} Z_{10}: &\quad (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3; \\ Z_{10}(s) = &\quad \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}\right), \frac{ps}{\sqrt{r^2+p^2}}\right) \qquad (19) \end{aligned}$$

讀者可自行驗證，$\|Z_{10}\text{'}(s)\| = 1$，因此上述新參數化形式確是單位速率的參數化形式。此外，若 $\sqrt{r^2+p^2} = 1$，我們有 $Z_{10}(s) = (r\cos s, r\sin s, ps)$，與 Z_9 有相同的形式。這是完全合理的，因為在此情況下，Z_9 本已具有單位速率，對 Z_9 進行上述轉化，只會得出原來的參數化形式。

連結至數學專題
連結至周家發網頁