

數學示例：微分與差分

學過數學分析的讀者都應認識**導數**(derivative) 的概念。設 f 為以 x 作為變項的函數，則 f 的導數，以下記作 Df ，也是一個函數，其定義如下：

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

上式右端展示一個分式的極限值，這個分式的分母和分子可被看成某個變化幅度，其中分母 h 是函數 f 的輸入項從 x 變成 $x+h$ 的變化幅度 (因為 $x+h-x=h$)，而分子 $f(x+h) - f(x)$ 則是函數 f 的輸出項從 $f(x)$ 變成 $f(x+h)$ 的變化幅度。上述兩個變化幅度之商可被看成函數 f 的「變化率」(rate of change)，而導數就是當函數輸入項的變化幅度 h 趨向 0 時函數變化率的極限值。從以上介紹可見， D 本質上是一個「算子」(operator)，其作用是把一個函數 f 映射為另一個函數 Df 。

與導數密切相關的另一個算子是**微分**(differential) 算子。設 f 為如上定義的函數， h 為給定實數，則 f 的微分，以下記作 df ，也是一個函數，其定義如下：

$$df(x) = Df(x) \times h \quad (2)$$

以上的討論顯示，「變化幅度」是一個很重要的概念，值得為它引入一個專門的算子，此即**差分**(difference) 算子。設 f 和 h 如上定義，則 f 的差分，以下記作 Δf ，也是一個函數，其定義如下：

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (3)$$

與差分密切相關的另一個算子是**移位**(shift) 算子。設 f 和 h 如上定義，則 f 的移位，以下記作 Ef ，也是一個函數，其定義如下：

$$Ef(x) = f(x+h) \quad (4)$$

接著引入「恆等算子」 I ，即對任何函數 f ，都有

$$If(x) = f(x) \quad (5)$$

比較 (3) 和 (4)，可得算子 Δ 與 E 的關係如下：

$$\Delta = E - I \quad (6)$$

接下來讓我們看一個實例，設有函數

$$f(x) = 5^x \quad (7)$$

那麼根據數學分析的知識，我們有

$$Df(x) = 5^x \ln 5 \quad (8)$$

由此根據 (2)，可得

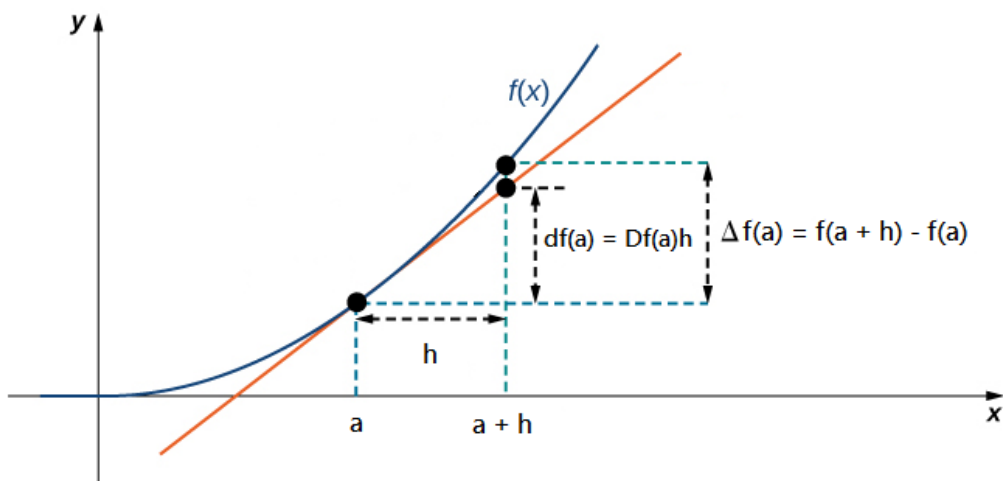
$$df(x) = 5^x \ln 5 \times h \quad (9)$$

另一方面，根據 (3) 和 (4)，可求得

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= 5^{x+h} - 5^x \\ &= 5^x(5^h - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Ef(x) &= f(x+h) \\ &= 5^{x+h} \end{aligned} \quad (11)$$

至此介紹了 D 、 d 、 Δ 和 E 這四個算子，它們之間除了 (2) 和 (6) 所示的相互關係外，還有以下關係： $df(x)$ 可被看成對 $\Delta f(x)$ 的「線性逼近」(linear approximation)，下圖展示此一情況：



上圖展示一條代表函數 f 的藍色曲線以及曲線上對應 $x = a$ 和 $x = a + h$

的兩點，這兩點的 y 坐標之差就是差分值 $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$ 。上圖也標示了 $f(a)$ 點處的紅色切線，根據數學分析的知識，這條切線的斜率等於導數值 $Df(a)$ 。根據解析幾何的知識，這條切線的方程是 $y = Df(a)(x-a) + f(a)$ ，由此可知這條切線上對應 $x = a+h$ 的點的 y 坐標是 $Df(a)h + f(a)$ ，因此切線上對應 $x = a$ 和 $x = a+h$ 這兩點的 y 坐標之差等於 $Df(a)h + f(a) - f(a) = Df(a)h$ ，但這正等於 $df(a)$ 。總上所述， $\Delta f(a)$ 代表藍色曲線上兩個黑點的 y 坐標之差，而 $df(a)$ 則代表紅色切線上兩個黑點的 y 坐標之差，我們在這裡是用紅色切線上的變化幅度來逼近藍色曲線上的變化幅度，因此 $df(a)$ 是對 $\Delta f(a)$ 的線性逼近。當 h 的數值很小時，這種逼近是準確的。

舉例說，設我們沿用 (7) 中的函數 $f(x)$ ，並設 $a = 3$ 和 $h = 0.02$ 。那麼從 $f(3)$ 到 $f(3.02)$ 的變化幅度可用 (10) 計算如下： $\Delta f(3) = 5^3 \times (5^{0.02} - 1) \approx 4.089052$ (這個數值當然也可用 $f(3.02) - f(3)$ 直接求得如下： $5^{3.02} - 5^3 \approx 4.089052$)。接著用 (9) 計算 $df(3)$ 如下： $df(3) = 5^3 \times \ln 5 \times 0.02 \approx 4.023595$ 。由於 $\Delta f(3) - df(3) \approx 0.065458$ ，這是一個不算大的差別，由此可見 $df(3)$ 的確可用來逼近 $\Delta f(3)$ 。

上述四個算子都具有線性性質，此即以下定理的內容。

定理 1：設 ϕ 為 D 、 d 、 Δ 和 E 中的任何一個， f 、 g 為函數， c 為實數，則

$$(i) \quad \phi(f+g) = \phi f + \phi g$$

$$(ii) \quad \phi(cf) = c\phi f$$

在數學分析中，我們還有「二階導數」(second order derivative)，即「導數的導數」的概念。對於函數 f 而言，其二階導數就是 Df 的導數，即 $D(Df)$ 。如用 D^2 來代表二階導數，我們有

$$D^2 f = D(Df) \quad (12)$$

類似地，就其餘三個算子也可推導出相應的二階算子，以下逐一推導。首先是「二階微分」(second order differential) 算子 (在以下計算中，我們要把 h 處理成常數)：

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= d(df(x)) \\ &= d(Df(x) \times h) \\ &= D(Df(x) \times h) \times h \\ &= D^2 f(x) \times h^2 \quad (13) \end{aligned}$$

其次是「二階差分」(second order difference) 算子：

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\
 &= \Delta(f(x+h) - f(x)) \\
 &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
 &= f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\
 &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \quad (14)
 \end{aligned}$$

最後是「二階移位」(second order shift) 算子：

$$\begin{aligned}
 E^2 f(x) &= E(Ef(x)) \\
 &= E(f(x+h)) \\
 &= f(x+2h) \quad (15)
 \end{aligned}$$

上面對 (14) 的推導頗為繁複，但如利用 (6)，把其中的 E 和 I 當作一般變項處理，並利用 $EI = E$ 和 $I^2 = I$ 這兩個顯而易見的事實，那麼可以求得 Δ^2 如下：

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 &= (E - I)^2 \\
 &= E^2 - 2EI + I^2 \\
 &= E^2 - 2E + I \quad (16)
 \end{aligned}$$

利用上述結果、(15)、(4) 和 (5)，便可直接求得

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 f(x) &= (E^2 - 2E + I)f(x) \\
 &= E^2 f(x) - 2Ef(x) + If(x) \\
 &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \quad (17)
 \end{aligned}$$

上述結果與 (14) 完全相同。

利用上述方法，還可就上述四類算子推導出一般的 n 階算子 (其中 n 是自然數)。在這四類 n 階算子中， D^n 等於數學分析中的 n 階導數，可用數學分析中的方法求得。此外，容易求得

$$d^n f(x) = D^n f(x) \times h^n \quad (18)$$

$$E^n f(x) = f(x + nh) \quad (19)$$

至於 Δ^n ，原則上可以利用 (6) 和「二項式定理」求得以下一般公式：

$$\begin{aligned}
 \Delta^n f(x) &= (E - I)^n f(x) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n C(n, k) E^{n-k} (-I)^k \right) f(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n C(n, k) (-1)^k f(x + (n-k)h) \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中 $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。但當 n 較大時，上式頗為繁複。如果只想就某個實數 a 求 $\Delta^n f(a)$ ，那麼可以把 (3) 推廣為

$$\Delta^i f(x + jh) = \Delta^{i-1} f(x + (j+1)h) - \Delta^{i-1} f(x + jh) \quad (21)$$

並應用**差分表**(difference table) 以進行計算。以下展示用來計算 $\Delta^4 f(a)$ 的差分表：

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
a	$f(a)$	$\Delta f(a)$	$\Delta^2 f(a)$	$\Delta^3 f(a)$	$\Delta^4 f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$	$\Delta f(a+h)$	$\Delta^2 f(a+h)$	$\Delta^3 f(a+h)$	—
$a+2h$	$f(a+2h)$	$\Delta f(a+2h)$	$\Delta^2 f(a+2h)$	—	—
$a+3h$	$f(a+3h)$	$\Delta f(a+3h)$	—	—	—
$a+4h$	$f(a+4h)$	—	—	—	—

上表中紅色的數式是要根據 (21) 計算的數值。從 (21) 可知，如要求上表中某個紅色數式，只需把緊貼該數式左下方的數式減去緊貼該數式正左方的數式便可。例如如要求 $\Delta^4 f(a)$ ，只需把緊貼 $\Delta^4 f(a)$ 左下方的 $\Delta^3 f(a+h)$ 減去緊貼 $\Delta^4 f(a)$ 正左方的 $\Delta^3 f(a)$ 便可。

現在如沿用 (7) 中的 $f(x)$ ，並設 $a = 3$ 和 $h = 0.02$ ，那麼用差分表計算 $\Delta^4 f(3)$ 各步驟的結果如下表所示 (下表數值準確至小數點後 6 位)：

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
3	125	4.089052	0.133763	0.004376	0.000143
3.02	129.089053	4.222815	0.138139	0.004519	—
3.04	133.311868	4.360954	0.142657	—	—
3.06	137.672822	4.503611	—	—	—
3.08	142.176433	—	—	—	—

從上表可知， $\Delta f(3) \approx 4.089052$ 、 $\Delta^2 f(3) \approx 0.133763$ 、 $\Delta^3 f(3) \approx 0.004376$ 和 $\Delta^4 f(3) \approx 0.000143$ 。

導數／微分和差分／移位這兩組概念雖然互有關連，但兩者存在本質上的差異。由於導數／微分的定義包含極限概念，它涉及連續變化的過程。由於差分／移位的定義僅考慮函數 f 在離散點 x 、 $x+h$ 、 $x+2h$ 等處的值，即使 f 是連續函數，它實際上把 f 「離散化」。基於上述差異，對上述兩組概念的研究構成兩個不同學科，適合用來研究不同性質的問題。對導數／微

分的研究構成微分學(Differential Calculus)¹的內容，適合用來研究與連續函數值有關的現象；對差分／移位的研究構成差分學(Difference Calculus)的內容，適合用來研究與離散函數值有關的現象。

接下來介紹差分學的一項應用—求導數的近似值²，為此須先引入泰勒級數(Taylor series)的概念。設 f 在 x 的某個範圍內是無限可微函數，那麼我們可以把 $f(x+h)$ 寫成以下泰勒級數：

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k f(x) \times \frac{h^k}{k!} \quad (22)$$

其中 $D^0 = I$ (由此可得 $D^0 f(x) = f(x)$)、 $h^0 = 1$ 和 $0! = 1$ 。上式包含無窮個項，如果僅截取上式首 n 個項，便會得到以 h 為「不定元」(indeterminate)的 n 次多項式，這樣做等於用一個多項式來逼近函數 f ³。舉例說，以下是 e^h 和 $\ln(1+h)$ 的泰勒級數 (以下略去這些泰勒級數收斂的範圍)：

$$e^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \dots \quad (23)$$

$$\ln(1+h) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{h^k}{k} = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \dots \quad (24)$$

根據 (4)，可以把 (22) 等號左端改寫成 $Ef(x)$ 。另一方面，(22) 等號右端的每一項都包含 $f(x)$ 。如果把 D^k 當作一般變項處理，那麼可以把 $f(x)$ 抽出來，進行整理，並利用 (23)，從而把 (22) 改寫成以下形式：

$$\begin{aligned} Ef(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} D^k f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hD)^k}{k!} f(x) \\ &= e^{hD} f(x) \end{aligned} \quad (25)$$

從上式可以得到算子 E 與 D 的關係如下：

$$E = e^{hD} \quad (26)$$

¹在數學分析上，求導數的運算也稱為「微分」(differentiation)，因此「微分」一詞有多種意思，要視乎具體情況而定。

²由於本文假設讀者對數學分析有一定了解，所以不擬介紹微分學的應用。

³如果僅截取泰勒級數的首兩個項，便會得到 $f(x+h) \approx f(x) + Df(x) \times h$ 。根據 (2) 和 (3)，這等於 $\Delta f(x) \approx df(x)$ ，此即前述用微分作為差分的線性逼近，因此截取有限項的泰勒級數實質上等於用高次多項式逼近函數。

由此從 (6) 又可得到算子 Δ 與 D 的關係如下：

$$\Delta = e^{hD} - I \quad (27)$$

由於指數函數的逆函數是對數函數，從上式又可得到：

$$D = \frac{1}{h} \ln(I + \Delta) \quad (28)$$

應用 (24) 改寫上式，可得 (請注意算子 I 對應著實數 1)：

$$D = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Delta^k}{k} = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right) \quad (29)$$

根據上式，我們可以借助 Δ 算子的運算結果來求導數算子 D 運算結果的近似值。仍以 (7) 中的 $f(x)$ 為例，設 $h = 0.02$ ，那麼應用上式以及前面用差分表求得的結果，可以求得 $Df(3)$ 的近似值如下：

$$\begin{aligned} Df(3) &\approx \frac{1}{0.02} \left(\Delta f(3) - \frac{\Delta^2 f(3)}{2} + \frac{\Delta^3 f(3)}{3} - \frac{\Delta^4 f(3)}{4} \right) \\ &\approx \frac{1}{0.02} \left(4.089052 - \frac{0.133763}{2} + \frac{0.004376}{3} - \frac{0.000143}{4} \right) \\ &\approx 201.179671 \end{aligned}$$

利用 (29) 還可求高階導數，這是因為如果把 D 當作一般變項處理，那麼可以把 n 階導數算子 D^n 當作 D 的幕次處理，例如 D^2 便可用以下方法求得：

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(\frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11\Delta^4}{12} + \dots \right) \quad (30) \end{aligned}$$

應用上式以及前面用差分表求得的結果，可以求得 $D^2 f(3)$ 如下：

$$\begin{aligned} D^2 f(3) &\approx \frac{1}{0.02^2} \left(\Delta^2 f(3) - \Delta^3 f(3) + \frac{11\Delta^4 f(3)}{12} + \dots \right) \\ &\approx \frac{1}{0.02^2} \left(0.133763 - 0.004376 + \frac{11 \times 0.000143}{12} \right) \\ &\approx 323.795208 \end{aligned}$$

為驗證以上計算結果，可以運用 (8) 求得 $Df(3) = 5^3 \times \ln 5 \approx 201.179739$ 。此外，根據數學分析的知識， $D^2 f(x) = 5^x (\ln 5)^2$ ，由此可求得 $D^2 f(3) =$

$5^3(\ln 5)^2 \approx 323.786299$ 。以上兩個近似值都接近上述確切數值。

以上討論的 $f(x)$ 只是用來示範如何應用差分算子求導數的近似值，對於像 (7) 中的 $f(x)$ 這樣簡單的函數，採用數學分析中的求導公式直接計算其導數，顯然比應用差分算子更為快捷和準確。不過，如果有關函數難以用數學分析的方法求導，或者只有該函數的部分離散值而不知道函數的公式，便只能應用數值方法求導數的近似值，而差分算子正為我們提供這樣的方法。

連結至數學專題
連結至周家發網頁