

數學示例：微分／差分運算法則

我們在《數學示例：微分與差分》中介紹了導數算子 D 和差分算子 Δ 的概念 (求導數運算又稱「微分」)，這兩個算子的作用都是把一個函數映射為另一個函數。學過數學分析的讀者都應學過如何對函數求導數，為方便與下文的差分作比較，下表列出各種「初等函數」(elementary function，包括冪函數、指數函數、對數函數、圓函數和雙曲函數¹) 的導數 (在下表中， a 代表常數)：

表 1

$f(x)$	$Df(x)$
a	0
x^a	ax^{a-1}
a^x ($a > 0$)	$a^x \ln a$
$\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

上表第二欄的結果可以用導數的定義 (見《數學示例：微分與差分》中的 (1)) 直接求得。對於從上述初等函數通過加減乘除、複合或求逆運算而得的函數，則可通過運用導數的線性性質以及求導數的積法則 (product rule)、商法則 (quotient rule)、鏈式法則 (chain rule) 和逆函數定理 (Inverse Function Theorem) 求得。我們在上述網頁已介紹了線性性質 (見該網頁的「定理 1」)

¹ 「圓函數」(circular function) 即通常所稱的「三角函數」(trigonometric function)，包括 $\sin x$ 、 $\cos x$ 等；「雙曲函數」(hyperbolic function) 則包括 $\sinh x$ 、 $\cosh x$ 等，這兩個函數都可用指數函數 e^x 定義如下：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

)，現把上述四個法則／定理的內容整合成以下定理²：

定理 1：設 f 和 g 為函數，則

$$(i) \quad D(f \times g) = Df \times g + f \times Dg$$

$$(ii) \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df \times g - f \times Dg}{g^2}$$

$$(iii) \quad D(f \circ g) = (Df) \circ g \times Dg$$

$$(iv) \quad D(f^{-1}) = \frac{1}{(Df) \circ f^{-1}}$$

舉例說，如要求 Da^{bx} (其中 a 和 b 都是常數)，可以把 a^{bx} 看成 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = bx$ 這兩個函數的複合。由於 $Df(x) = a^x \ln a$ ，故有 $(Df) \circ g(x) = a^{bx} \ln a$ 。另外，我們又有 $Dg(x) = b$ 。由此根據「定理 1(iii)」，我們有

$$\begin{aligned} Da^{bx} &= D(f \circ g)(x) \\ &= (Df) \circ g(x) \times Dg(x) \\ &= ba^{bx} \ln a \end{aligned}$$

另外又如要求 $D \arcsin x$ ，由於這個函數是 $f(x) = \sin x$ 的逆函數，即有 $f^{-1}(x) = \arcsin x$ ，而 $Df(x) = \cos x$ ，因此根據「定理 1(iv)」，我們有

$$\begin{aligned} D \arcsin x &= D(f^{-1})(x) \\ &= \frac{1}{(Df) \circ f^{-1}(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

如同求導數的情況，我們也可運用差分的如下定義直接求函數的差分 (下式等於《數學示例：微分與差分》中的 (3))：

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1)$$

由於上式不涉及求極限運算，因此差分運算一般較微分運算容易，其關鍵在於能否把運算結果簡化成易於操作的形式。舉例說，如要求 $\Delta \sin(ax)$ (其

²為簡明起見，以下略去這些法則／定理所須滿足的條件，例如 (ii) 只適用於那些使 $g(x)$ 不等於 0 的 x 值，(iv) 只適用於 f 為可逆函數的情況等。

中 a 是常數), 除了應用 (1) 外, 還要應用三角學中的「和差化積公式」:
 $\sin x \pm \sin y = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$ 以簡化結果, 從而得到

$$\begin{aligned} \Delta \sin(ax) &= \sin(a(x+h)) - \sin(ax) \\ &= 2 \sin\left(\frac{ah}{2}\right) \cos\left(a\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

當然並非所有函數都可進行上述簡化, 以我們非常熟悉的冪函數 x^n 為例, 若 n 是正整數, 那麼根據 (1), 我們有

$$\begin{aligned} \Delta x^n &= (x+h)^n - x^n \\ &= x^n + nhx^{n-1} + \dots + nh^{n-1}x + h^n - x^n \\ &= nhx^{n-1} + \dots + nh^{n-1}x + h^n \end{aligned} \quad (3)$$

上面第二行應用了「二項式定理」把 $(x+h)^n$ 展開, 但這樣做並不能把上式 Δx^n 簡化許多; 而且更重要的是, 上述結果比表 1 所示的 $Dx^n = nx^{n-1}$ 多出很多項, 只有第一項的 nhx^{n-1} 跟 nx^{n-1} 相像。

上述結果顯示, 冪函數 x^n 不便於進行差分運算。為改善此一情況, 可以改用遞降階乘 (falling factorial) 函數。設 n 為整數, h 為給定實數, 則「 x 的 n 次遞降階乘冪», 記作 $x^{\underline{n}}$ (請注意這裡的 n 加了下劃線), 定義如下:

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-h)\dots(x-(n-1)h) & \text{若 } n > 0 \\ 1 & \text{若 } n = 0 \\ \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+(-n)h)} & \text{若 } n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

舉例說, 若設定 $h = 3$, 則 $x^{\underline{4}} = x(x-3)(x-6)(x-9)$ 、 $x^{\underline{0}} = 1$ 並且 $x^{\underline{-4}} = \frac{1}{(x+3)(x+6)(x+9)(x+12)}$ 。遞降階乘可被看成一般「階乘」(factorial) 的推廣, 這是因為若設定 $h = 1$, 而且 $n > 0$, 則有

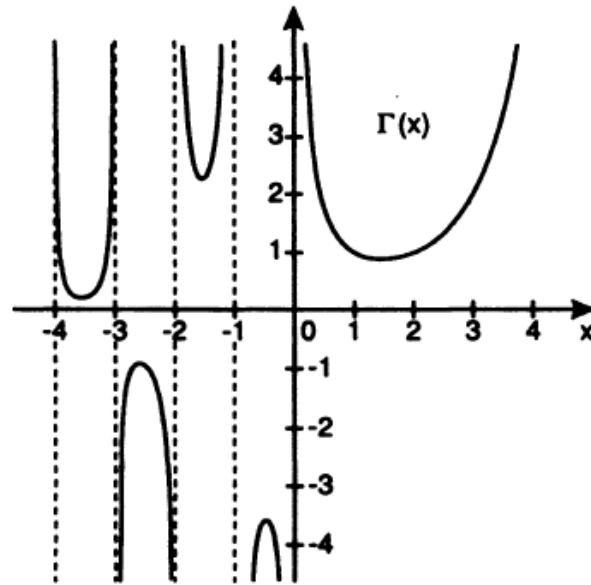
$$\begin{aligned} n^{\underline{n}} &= n \times (n-1) \times \dots \times 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

可是上述定義僅適用於當 n 為整數的情況, 如要把 $x^{\underline{n}}$ 的定義推廣到 n 為任意實數的情況, 便要引入伽瑪函數 (gamma function), 這是一個由以下積分定義的函數:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (5)$$

在上式中, x 可以是任何不等於非負整數的實數³, 下圖展示 $\Gamma(x)$ (x 是 $(-4, 4)$ 間的實數) 的圖象:

³伽瑪函數的論元其實可以是任何不等於非負整數的複數, 但為免引入複數, 本文只討論其論元為實數的情況。



根據上述定義，可以求得與伽瑪函數相關的以下重要結果：

$$\Gamma(1) = 1 \quad (6)$$

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (7)$$

從 (6) 和 (7) 可以推導出，當 $n \in \mathbb{N}$ ：

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) \\ &\dots \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1)\Gamma(1) \\ &= n! \quad (8) \end{aligned}$$

由此可見，伽瑪函數可被看成一般階乘函數的推廣，例如我們有 $\Gamma(4) = 3! = 6$ 。

如前所述，遞降階乘函數也可被看成一般階乘函數的推廣，因此伽瑪函數與遞降階乘函數存在一定聯繫。事實上，可以證明當 a 是整數時，存在以下關係：

$$x^a = \frac{h^a \Gamma\left(\frac{x}{h} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} - a + 1\right)} \quad (9)$$

這樣便可以把遞降階乘函數的定義從 (4) 推廣為上式。舉例說，把 $a = 2$ 代入上式，並應用 (7)，可得

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{h^2 \Gamma\left(\frac{x}{h} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} - 2 + 1\right)} \\
 &= \frac{h^2 \left(\frac{x}{h}\right) \Gamma\left(\frac{x}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} - 1\right)} \\
 &= \frac{h^2 \left(\frac{x}{h}\right) \left(\frac{x}{h} - 1\right) \Gamma\left(\frac{x}{h} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} - 1\right)} \\
 &= h^2 \left(\frac{x}{h}\right) \left(\frac{x-h}{h}\right) \\
 &= x(x-h)
 \end{aligned}$$

以上結果跟以 (4) 定義的 x^2 完全相同。

學過基本代數的讀者都知道，冪函數的冪次滿足以下「指數律」：

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

從以上指數律還可推導出冪函數的負冪次與其「倒數」(reciprocal) 之間的以下簡單關係：

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

可是，遞降階乘函數的「指數律」卻較為複雜。事實上，利用 (9)，不難證明遞降階乘函數滿足以下「指數律」：

$$x^{m+n} = x^m (x - mh)^n \quad (10)$$

舉例說，從上式可得到 $x^4 = x^{1+3} = x(x-h)^3$ ，讀者可根據定義 (4) 驗證上述結果是正確的。此外，還可以利用 (10) 推導出遞降階乘函數的負冪次與其倒數的相互轉換公式。首先，如把 (10) 中的 x 和 n 分別改為 $x + mh$ 和 $-m$ 並利用 $x^0 = 1$ 此一關係，便可得到以下把遞降階乘函數的負冪次轉換成倒數的公式：

$$x^{-m} = \frac{1}{(x + mh)^m} \quad (11)$$

其次，如把 (10) 中的 n 改為 $-m$ 並利用 $x^0 = 1$ 此一關係，便可得到以下把遞降階乘函數的倒數轉換成負冪次的公式：

$$\frac{1}{x^m} = (x - mh)^{-m} \quad (12)$$

舉例說，利用 (11) 可以把 x^{-4} 轉換成 $\frac{1}{(x+4h)^4}$ 。利用 (12)，則可以把 $\frac{1}{x^4}$ 轉換成 $(x-4h)^{-4}$ 。由此也可見， x^{-4} 並不等於 $\frac{1}{x^4}$ 。

x^a 的定義雖然較 x^n 複雜，但前者的差分卻比後者的差分簡單。利用 (9)，可以證明

$$\Delta x^a = ahx^{a-1} \quad (13)$$

比較 (13) 和 (3)，可以看到 Δx^a 比 Δx^n 簡單，而且跟 Dx^a 更相似，因此 x^a 較適合進行差分運算。

在差分的應用中，有時需要採用遞降階乘函數的更一般形式 $(x+b)^a$ (其中 b 是常數)，此一形式的定義可以從 x^a 的定義 (9) 直接得到，只須把 (9) 中的 x 全部改為 $x+b$ 便可。此外， $\Delta(x+b)^a$ 的公式也跟 (13) 很相似，只須把 (13) 中的 x 全部改為 $x+b$ 便可。

下表列出各種初等函數 (其中冪函數被遞降階乘函數取代) 的差分：

表 2

$f(x)$	$\Delta f(x)$
a	0
$(x+b)^a$	$ah(x+b)^{a-1}$
$a^{bx} \ (a > 0)$	$a^{bx}(a^{bh} - 1)$
$\log_a(bx) \ (a, b > 0, a \neq 1)$	$\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)$
$\sin(ax)$	$2 \sin\left(\frac{ah}{2}\right) \cos\left(a\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$
$\cos(ax)$	$-2 \sin\left(\frac{ah}{2}\right) \sin\left(a\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$
$\sinh(ax)$	$2 \sinh\left(\frac{ah}{2}\right) \cosh\left(a\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$
$\cosh(ax)$	$2 \sinh\left(\frac{ah}{2}\right) \sinh\left(a\left(x + \frac{h}{2}\right)\right)$

以下對上表的部分欄目作一些解釋。由於差分運算不像導數運算那樣有鏈式法則，我們不能從 $\Delta f(x)$ 通過鏈式法則求得 $\Delta f(ax)$ (例如不能像前面根據 Da^x 的結果求 Da^{bx} 那樣根據 Δa^x 的結果求 Δa^{bx})，因此上表中指數函數、對數函數、圓函數和雙曲函數的論元都採用較一般的形式 bx 或 ax 而非 x 。

上表雖然沒有提供遞降階乘函數的倒數的差分，但利用轉換公式 (11)

和 (12) 以及上表, 可求得 $\Delta\left(\frac{1}{x^a}\right)$ 如下:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{x^a}\right) &= \Delta((x-ah)^{-a}) \\ &= -ah(x-ah)^{-a-1} \\ &= -\frac{ah}{(x+h)^{a+1}} \quad (14)\end{aligned}$$

對於從「表 2」中初等函數通過加減和純量乘法而得的函數, 則可通過運用差分的線性性質 (見《數學示例: 微分與差分》中的「定理 1」) 來求差分。正如我們可以把包含不同係數和非負整數幕次的幕函數組成代數多項式 (例如 $3x^4 - 5x^2 + 6x - 7$) 一樣, 我們也可以把包含不同係數和非負整數幕次的遞降階乘函數組成遞降階乘多項式 (falling factorial polynomial) (例如 $3x^{\downarrow 4} - 5x^{\downarrow 2} + 6x^{\downarrow 1} - 7$)。為求這種多項式的差分, 只需應用 (13) 和差分算子的線性性質, 以下是一個計算實例 (請注意根據 (4), 我們有 $x^{\downarrow 1} = x$):

$$\begin{aligned}\Delta(3x^{\downarrow 4} - 5x^{\downarrow 2} + 6x^{\downarrow 1} - 7) \\ &= 3\Delta(x^{\downarrow 4}) - 5\Delta(x^{\downarrow 2}) + 6\Delta(x^{\downarrow 1}) - 7\Delta(1) \\ &= 3 \times 4hx^{\downarrow 3} - 5 \times 2hx^{\downarrow 1} + 6 \times hx^{\downarrow 0} - 7 \times 0 \\ &= h(12x^{\downarrow 3} - 10x^{\downarrow 1} + 6)\end{aligned}$$

上述結果跟 $D(3x^4 - 5x^2 + 6x - 7) = 12x^3 - 10x + 6$ 很相似。

帶有非負整數幕次的幕函數與遞降階乘函數可以互相轉換。給定某個帶有非負整數幕次的遞降階乘函數, 可以運用 (4) 將其轉換成幕函數, 以下是一個計算實例:

$$\begin{aligned}x^{\downarrow 4} &= x(x-h)(x-2h)(x-3h) \\ &= x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x \quad (15)\end{aligned}$$

反過來, 給定某個帶有非負整數幕次的幕函數, 可以透過求解未知係數的方法將其轉換成遞降階乘函數。舉例說, 設給定 x^4 , 可以把它寫成以下形式:

$$\begin{aligned}x^4 &= c_4x^{\downarrow 4} + c_3x^{\downarrow 3} + c_2x^{\downarrow 2} + c_1x^{\downarrow 1} \\ &= c_4x(x-h)(x-2h)(x-3h) + c_3x(x-h)(x-2h) + c_2x(x-h) + c_1x\end{aligned}$$

接下來要求解 c_4 、 c_3 、 c_2 和 c_1 這四個係數。讀者可自行驗證, 求解的結果是 $c_1 = h^3$ 、 $c_2 = 7h^2$ 、 $c_3 = 6h$ 和 $c_4 = 1$ 。由此可得

$$x^4 = x^{\downarrow 4} + 6hx^{\downarrow 3} + 7h^2x^{\downarrow 2} + h^3x^{\downarrow 1} \quad (16)$$

用上述方法把帶有非負整數幕次的冪函數與遞降階乘函數互相轉換涉及頗為繁瑣的計算。為此，我們先對上述計算作一些總結。從 (15) 容易看到，若 n 為正整數，則 x^n 具有以下一般形式：

$$x^n = \sum_{k=1}^n s(n, k) h^{n-k} x^k \quad (17)$$

而 x^n 則具有以下一般形式：

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) h^{n-k} x^k \quad (18)$$

因此把帶有非負整數幕次的冪函數與遞降階乘函數互相轉換的關鍵在於確定以上兩式中的係數 $s(n, k)$ 和 $S(n, k)$ ，這兩組係數在差分學中有特別名稱，分別稱為**第一類斯特靈數**(Stirling number of the first kind) 和**第二類斯特靈數**(Stirling number of the second kind)。為求這兩組數，我們首先注意到，由於 $x^1 = x^1$ ，因此有

$$s(1, 1) = 1 \quad (19)$$

$$S(1, 1) = 1 \quad (20)$$

此外，由於在 (17) 和 (18) 中， k 只在 1 與 n 之間取值，因此我們有

$$\text{若 } k < 1 \text{ 或 } k > n, \text{ 則 } s(n, k) = S(n, k) = 0 \quad (21)$$

其他 $s(n, k)$ 和 $S(n, k)$ 則可以用以下遞歸關係求得。

定理 2：設 n 和 k 為正整數，其中 $k \leq n$ ，則

$$(i) \quad s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k) \quad (22)$$

$$(ii) \quad S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \quad (23)$$

舉例說，以下是求 $s(2, 1)$ 和 $S(2, 1)$ 的計算過程：

$$\begin{aligned} s(2, 1) &= s(1, 0) - 1 \times s(1, 1) \\ &= 0 - 1 \times 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(2, 1) &= S(1, 0) + 1 \times S(1, 1) \\ &= 0 + 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

為方便以下計算，現將滿足 $1 \leq n \leq 4, 1 \leq k \leq n$ 的兩類斯特靈數列出如下：

$$\begin{aligned} s(1,1) &= 1 \\ s(2,1) &= -1 \quad s(2,2) = 1 \\ s(3,1) &= 2 \quad s(3,2) = -3 \quad s(3,3) = 1 \\ s(4,1) &= -6 \quad s(4,2) = 11 \quad s(4,3) = -6 \quad s(4,4) = 1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S(1,1) &= 1 \\ S(2,1) &= 1 \quad S(2,2) = 1 \\ S(3,1) &= 1 \quad S(3,2) = 3 \quad S(3,3) = 1 \\ S(4,1) &= 1 \quad S(4,2) = 7 \quad S(4,3) = 6 \quad S(4,4) = 1 \end{aligned} \quad (25)$$

上述結果還可用來把普通多項式與遞降階乘多項式互相轉換，從而得到一種求普通多項式差分的間接方法，這種方法是先把普通多項式轉換成遞降階乘多項式，接著求這個遞降階乘多項式的差分，然後再將結果轉換成普通多項式。舉例說，設有普通多項式 $f(x) = 3x^4 - 5x^2$ ，首先運用 (18) 和 (25) 把此一多項式轉換成遞降階乘多項式如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 5x^2 \\ &= 3(x^4 + 6hx^3 + 7h^2x^2 + h^3x^1) - 5(x^2 + hx^1) \\ &= 3x^4 + 18hx^3 + (21h^2 - 5)x^2 + (3h^3 - 5h)x^1 \end{aligned}$$

接著求上述遞降階乘多項式的差分，然後再運用 (17) 和 (24) 將結果轉換成普通多項式如下：

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta(3x^4 + 18hx^3 + (21h^2 - 5)x^2 + (3h^3 - 5h)x^1) \\ &= 12hx^3 + 54h^2x^2 + (42h^3 - 10h)x^1 + 3h^4 - 5h^2 \\ &= 12h(x^3 - 3hx^2 + 2h^2x) + 54h^2(x^2 - hx) + (42h^3 - 10h)x + 3h^4 - 5h^2 \\ &= 12hx^3 + 18h^2x^2 + 12h^3x - 10hx + 3h^4 - 5h^2 \end{aligned}$$

請讀者自行驗證，運用 Δ 的定義 (1) 計算 $\Delta f(x) = 3(x+h)^4 - 5(x+h)^2 - (3x^4 - 5x^2)$ ，同樣可得到上述結果。

此外，差分運算也有「積法則」和「商法則」(但卻沒有「鏈式法則」和「逆函數定理」)，這是以下定理的內容，請把以下兩個法則與「定理 1」的 (i) 和 (ii) 比較。惟請注意，由於求差分運算一般較求導數運算容易(因為不涉及求極限運算)，因此使用定義 (1) 直接求差分有時較使用以下兩個法則更為便捷。

定理 3：設 f, g 為函數，則

$$(i) \quad \Delta(f \times g) = \Delta f \times g + Ef \times \Delta g$$

$$(ii) \Delta \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\Delta f \times g - f \times \Delta g}{g \times E g}$$

其中 E 是《數學示例：微分與差分》介紹的移位算子，其定義如下 (下式等於上述網頁中的 (4))：

$$E f(x) = f(x+h) \quad (26)$$

以下讓我們用「表 2」中的結果和「積法則」求 $\Delta x e^x$ 如下：

$$\begin{aligned} \Delta x e^x &= \Delta(x^1 \times e^x) \\ &= \Delta x^1 \times e^x + E x \times \Delta e^x \\ &= h e^x + (x+h) e^x (e^h - 1) \\ &= e^x (e^h (x+h) - x) \end{aligned}$$

最後運用「商法則」和 $x^2 = x^2 + hx$ 此一事實求 $\Delta(\frac{1}{x^2})$ 如下：

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{x^2} \right) &= \frac{\Delta 1 \times x^2 - 1 \times \Delta x^2}{x^2 \times E x^2} \\ &= \frac{-\Delta(x^2 + hx)}{x^2(x+h)^2} \\ &= \frac{-2hx - h^2}{x^2(x+h)^2} \end{aligned}$$

請讀者自行驗證，運用 Δ 的定義 (1) 計算 $\Delta x e^x = (x+h)e^{x+h} - x e^x$ 和 $\Delta(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$ ，同樣可得到以上兩個結果。

連結至數學專題
連結至周家發網頁