數學示例：愛恩斯坦求和約定

我們在中學時代學習了一種用 $\sum$ 符號表示「求和」(summation) 運算的方法，這種表示法可以用一個簡單例子予以概括：

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \qquad (1)$$

在上式中，i 稱為虛擬指標(dummy index)，是求和運算的對象。上述方法既簡單又易用，能夠應付一般的需要。可是，如果求和運算涉及多個虛擬指標和 $\sum$ 符號，例如在張量分析和黎曼幾何的應用中，上述表示法便會變得相當冗贅。舉例說，下式便表示 3 維空間 $\mathbb{R}^3$ 上的一個「混合張量」(我們會另文介紹「張量」)：

$$\sum_{g=1}^{3}\sum_{h=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} T_{ijk}^{gh}\, e_g \otimes e_h \otimes \epsilon^i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k \qquad (2)$$

如把上式的 $\sum$ 符號展開，可得到以下包含 243 項的數式：

$$\begin{aligned} &T_{111}^{11}\, e_1 \otimes e_1 \otimes \epsilon^1 \otimes \epsilon^1 \otimes \epsilon^1 + T_{112}^{11}\, e_1 \otimes e_1 \otimes \epsilon^1 \otimes \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 + \ldots \\ \ldots\ &+ T_{332}^{33}\, e_3 \otimes e_3 \otimes \epsilon^3 \otimes \epsilon^3 \otimes \epsilon^2 + T_{333}^{33}\, e_3 \otimes e_3 \otimes \epsilon^3 \otimes \epsilon^3 \otimes \epsilon^3 \qquad (3) \end{aligned}$$

雖然 (2) 已大大簡化了 (3)，但由於在張量分析和黎曼幾何中要經常處理這些求和運算，如每次都要寫出多重 $\sum$ 符號，仍是非常繁冗的事。本文主旨是介紹一種簡化表示法，由於這種表示法是由愛恩斯坦 (Einstein) 提出，故稱愛恩斯坦求和約定(Einstein summation convention)(以下簡稱「求和約定」)。

求和約定可以簡單概括為，如果事先約定一個數學表達式的某個虛擬指標 i 在整數 i_1 和 i_2 之間取值 (其中 $i_1 \leq i_2$)，並且 i 在這個表達式的每一項中都成對出現，其中一個取「上標」(superscript) 形式，另一個取「下標」(subscript) 形式，這便代表要對這個虛擬指標進行從 i_1 加到 i_2 的求和運算，即在這個表達式前隱含著符號 $\sum_{i=i_1}^{i_2}$ (而無需寫出這個符號)。此外，在求和約定下，任何虛擬指標一般不能在一個數學表達式的同一項中出現三

次或以上。

以 (2) 為例，這個表達式的虛擬指標 g、h、i、j 和 k 都是成對出現，而且每對都各取上、下標形式，因此如果事先約定 g、h、i、j 和 k 都是在 1 和 3 之間取值，那麼可以把它寫成以下簡化形式：

$$T^{gh}_{ijk}\, e_g \otimes e_h \otimes \epsilon^i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k \qquad (4)$$

若有關表達式本來並非採取求和約定所規定的形式，便須先把該表達式改寫成所規定的形式，然後才能運用求和約定。以 (1) 為例，$a_i x_i$ 的虛擬指標 i 雖然成對出現，但並非各取上、下標形式，因此須先把 $a_i x_i$ 改寫成所規定的形式，然後才能運用求和約定 (這裡還要約定 i 在 1 和 4 之間取值)。據此，(1) 等號左端在求和約定下可表示成

$$a^i x_i \quad \text{或} \quad a_i x^i \qquad (5)$$

請注意在求和約定下，處於上標位置的指標並不代表冪次。為區別虛擬指標與冪次，必須把虛擬指標和冪次分別放在括號內和括號外。舉例說，由於傳統表達式 $\sum_{i=1}^{4} a_i {x_i}^2$ 包含冪次，在使用求和約定改寫該式時，須加上括號以分隔虛擬指標和冪次，即 $a^i (x_i)^2$ 或 $a_i (x^i)^2$。

求和約定並非萬能，當虛擬指標並非成對出現時，便無法使用求和約定。舉例說，傳統表達式 $\sum_{i=1}^{4} x_i$ 僅包含一個虛擬指標 i，所以無法使用求和約定改寫該式。此外，如果虛擬指標中至少有一個是冪次，也無法使用求和約定。舉例說，傳統表達式 $\sum_{i=1}^{4} a_i x^i$ 的虛擬指標 i 雖然成對出現，但其中一個是冪次，所以也無法使用求和約定改寫該式。

一個數學表達式除了虛擬指標外，還可包含其他指標，稱為自由指標(free index)，以上論述不適用於這些指標。舉例說，在傳統表達式 $\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j$ 中，i 不是求和運算的對象，因此是自由指標 (只有 j 才是虛擬指標)。雖然 i 在各項中並非成對出現，但這並不妨礙我們運用求和約定，把該式改寫成 $a_{ij} x^j$ 或 $a_i^j x_j$。

當然我們也可以事先約定自由指標的取值範圍，但所得結果是多個表達式，而非對自由指標進行求和運算。以上段討論過的 $a_{ij} x^j$ 為例，如果事先約定自由指標 i 在 1 和 2 之間取值 (而虛擬指標 j 則在 1 和 4 之間取值)，所得結果將是以下兩式 (以下列出把這兩式展開的結果)：

$$a_{1j} x^j = a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + a_{13} x^3 + a_{14} x^4$$

$$a_{2j} x^j = a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + a_{23} x^3 + a_{24} x^4$$

在張量分析中，常常會遇到一些數學表達式，這些表達式包含成對出現，各取上、下標形式，但卻並不代表求和運算的指標 (故為自由指標)。在此情

況下，為免產生混淆，可以在這些表達式右側加上「(並非求和)」的註釋，以註明此一表達式並不代表求和運算。以下式為例，

$$g_i^i = 0 \ \ (i = 1, 2, 3) \ \ \text{(並非求和)}$$

在上式中，i 是自由指標，因此上式是說度量張量 g (我們會另文介紹度量張量) 的三個分量 g_1^1、g_2^2 和 g_3^3 各自等於 0，而非 $g_1^1 + g_2^2 + g_3^3 = 0$。

用求和約定寫出來的數式可以進行各種代數運算，一種常見的運算是代入運算。在進行這種運算時，須注意進行代入後所得的數式不可違反求和約定的要求。舉例說，設給定

$$y^i = a^{ij} x_j \qquad (6)$$

$$z = b_{ij} y^i x^j \qquad (7)$$

如把 (6) 直接代入 (7)，會得到以下結果：

$$z = b_{ij} a^{ij} x_j x^j$$

在上式中，同一項包含四個 j，不符合求和約定的要求。但由於在 (6) 中，j 是虛擬指標，我們可以把它隨意改為不出現於 (7) 的虛擬指標，例如 k，即把 (6) 改為

$$y^i = a^{ik} x_k \qquad (8)$$

接著如把 (8) 代入 (7)，並加以整理，便會得到以下符合求和約定要求的結果：

$$z = a^{ik} b_{ij} x_k x^j$$

另一種常見運算是運用乘法對加法的分配律，在進行這種運算時要小心不要把虛擬指標變成自由指標[1]。以下式為例，

$$a_{ij}(x^i + y^j) \qquad (9)$$

上式應被看成 a_{ij} 與 $x^i + y^j$ 的乘積，因此上式只包含一項，並且 i 和 j 都是虛擬指標。如事先約定 i 和 j 都在 1 和 2 之間取值，那麼上式可展開成下式：

$$a_{11}x^1 + a_{11}y^1 + a_{12}x^1 + a_{12}y^2 + a_{21}x^2 + a_{21}y^1 + a_{22}x^2 + a_{22}y^2$$

請注意我們不能用乘法對加法的分配律來把 (9) 改寫成以下包含兩項的數式：

$$a_{ij}x^i + a_{ij}y^j \qquad (10)$$

[1]這裡不是說任何運算都不應改變指標的虛擬／自由性質，代入運算便可以把自由指標變為虛擬指標。以前面討論過的 (8) 為例，在該數式中，i 是自由指標；但在把 (8) 代入 (7) 後，i 便變成虛擬指標。

這是因為在上式的第一項中，j 是自由指標，而在第二項中，i 是自由指標。為方便理解，現用其他字母取代上式中的虛擬指標如下：

$$a_{kj}x^k + a_{il}y^l \qquad (11)$$

現在如事先約定 i、j、k 和 l 都在 1 和 2 之間取值，那麼上式可展開為以下四式 (而非一式)：

$$a_{11}x^1 + a_{21}x^2 + a_{11}y^1 + a_{12}y^2$$

$$a_{11}x^1 + a_{21}x^2 + a_{21}y^1 + a_{22}y^2$$

$$a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{11}y^1 + a_{12}y^2$$

$$a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{21}y^1 + a_{22}y^2$$

由此可見 (9) 並不等於 (10)。

不過，在不改變指標的虛擬／自由性質的前提下，我們卻可以運用乘法對加法的分配律，而且在某些情況下，必須運用此分配律去理解有關表達式。舉例說，請看下式：

$$(a_ib_j + a_jb_i)x^iy^j \qquad (12)$$

如把上式看成 $a_ib_j + a_jb_i$ 與 x^iy^j 的乘積，那麼上式只包含一項，而且不符合求和約定的規定 (因為虛擬指標 i 和 j 在同一項中出現了三次)。可是，根據乘法對加法的分配律，上式可以改寫成下式：

$$a_ib_jx^iy^j + a_jb_ix^iy^j \qquad (13)$$

在上式所包含的兩項中，i 和 j 都是虛擬指標，沒有改變性質，而且上式符合求和約定的規定，因此上式中分配律的運用是合理而且必要的。

以上介紹的求和約定是較嚴謹的版本 (可稱為「嚴式求和約定」)，但它還有另一個較寬鬆的版本 (可稱為「寬式求和約定」)，就是只要虛擬指標 i 在表達式的每一項中都成對出現，便代表對 i 進行求和運算。在寬式求和約定下，(1) 可以簡單改寫成下式 (而無需採取 (5) 那樣的形式)：

$$a_ix_i \qquad (14)$$

寬式求和約定 (以下簡稱「求和約定」) 可用來簡化線性代數中的某些數式。在傳統線性代數中，若 A 是 $m \times m$ 方陣，則 A 的「跡」(trace) tr$A$ 等於 A 主對角線上各項之和，即 $\sum_{k=1}^m A_{kk}$。若 B 和 C 分別是 $l \times m$ 和 $m \times n$ 矩陣，則 B 與 C 的「矩陣積」(matrix product) BC 的第 i 行第 j 列上的項 (以下記作 $(BC)_{ij}$) 等於 $\sum_{k=1}^m B_{ik}C_{kj}$。此外，若 $v = [v_1, \ldots, v_m]^T$ 和

$w = [w_1, \ldots, w_m]^T$ 是 m 維向量，則 v 與 w 的「點積」(dot product) $v \cdot w$ 等於 $\sum_{k=1}^m v_k w_k$。運用求和約定，可以把上述三個結果寫成以下形式 (以下約定 k 在 1 和 m 之間取值)：

$$\mathrm{tr}(A) = A_{kk} \qquad (15)$$

$$(BC)_{ij} = B_{i_k} C_{kj} \qquad (16)$$

$$v \cdot w = v_k w_k \qquad (17)$$

在介紹其他數式之前，須先引入兩個特殊函數。第一個函數是我們在《數學示例：餘向量與 1 形式》中介紹的「克羅內克 δ 函數」，簡稱「δ 函數」，其定義如下：設 i 和 j 有相同的取值範圍，則

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} i = j \\ 0, & \text{若} i \neq j \end{cases} \qquad (18)$$

根據上述定義，我們有 $\delta_{11} = 1$ (因為 $1 = 1$) 和 $\delta_{12} = 0$ (因為 $1 \neq 2$)。

第二個函數稱為列維-奇維塔 ϵ 函數(Levi-Civita epsilon)，簡稱「ϵ 函數」，其定義如下：設 i_1、...、i_m 有相同的取值範圍，則

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_m} = \begin{cases} 1, & \text{若}\ (i_1, \ldots, i_m)\ \text{是}\ (1, \ldots, m)\ \text{的偶排列} \\ -1, & \text{若}\ (i_1, \ldots, i_m)\ \text{是}\ (1, \ldots, m)\ \text{的奇排列} \\ 0, & \text{若}\ (i_1, \ldots, i_m)\ \text{不是}\ (1, \ldots, m)\ \text{的排列} \end{cases} \qquad (19)$$

在上述定義中，序列 $(i_1, \ldots, i_m)$ 是序列 $(1, \ldots, m)$ 的偶 (奇) 排列，如果可以透過進行偶 (奇) 數次對換把 $(i_1, \ldots, i_m)$ 變成 $(1, \ldots, m)$，這裡「對換」是指對調某序列中的兩個 (不一定相鄰的) 元素。舉例說，由於可以透過 2 次對換把 $(3, 1, 2)$ 變成 $(1, 2, 3)$ (先把 3 和 1 對調，然後再把 3 和 2 對調)，因此 $(3, 1, 2)$ 是 $(1, 2, 3)$ 的偶排列，由此有 $\epsilon_{312} = 1$。另外，由於可以透過 1 次對換把 $(1, 3, 2)$ 變成 $(1, 2, 3)$ (把 2 和 3 對調)，因此 $(1, 3, 2)$ 是 $(1, 2, 3)$ 的奇排列，由此有 $\epsilon_{132} = -1$。最後，由於 $(1, 2, 1)$ 不是 $(1, 2, 3)$ 的排列，由此有 $\epsilon_{121} = 0$。

接著介紹以上兩個函數的一些性質。δ 函數的一個重要性質是可用來改變同項中其他因子的指標，以下用兩個實例以作說明，第一個例子是 (以下約定 i 在 1 和 m 之間取值)：

$$\begin{aligned} \delta_{hi} A_{ijk} &= \delta_{h1} A_{1jk} + \ldots + \delta_{hh} A_{hjk} + \ldots + \delta_{hm} A_{mjk} \\ &= 0 \times A_{1jk} + \ldots + 1 \times A_{hjk} + \ldots + 0 \times A_{mjk} \\ &= A_{hjk} \end{aligned}$$

我們可以把上述計算結果作以下形象化的理解：δ_{hi} 用其指標 i 抵消了同項中另一個因子 A_{ijk} 的指標 i，並且將其餘下的指標 h 佔據 A_{ijk} 中被抵消指

標 i 原有的位置。

第二個例子是 (以下約定 k 和 i 均在 1 和 2 之間取值)：

$$\begin{aligned}\delta_{ik}A_{ijk} &= \delta_{11}A_{1j1}+\delta_{12}A_{1j2}+\delta_{21}A_{2j1}+\delta_{22}A_{2j2}\\ &= A_{1j1}+A_{2j2}\\ &= A_{kjk} \text{ 或 } A_{iji}\end{aligned}$$

請注意上面最後一行的兩個等價結果都可用前述的「抵消法」得到。在上例中，δ_{ik} 的兩個指標 i 和 k 都可成為抵消的對象，從而產生上述兩個結果。請讀者自行驗證，若用「抵消法」抵消指標 i，所得結果為 A_{kjk}；若用「抵消法」抵消指標 k，所得結果為 A_{iji}。

如前所述，$\epsilon_{i_1\ldots i_m}$ 的值取決於 $(i_1,\ldots,i_m)$ 相對於 $(1,\ldots,m)$ 的排列奇偶性，因此如果把 $\epsilon_{i_1\ldots i_m}$ 下標中的數字對調偶 (奇) 數次，可得到與 $\epsilon_{i_1\ldots i_m}$ 相同 (相差一個正負號) 的值。舉例說，我們有 $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki}=\epsilon_{kij}$ 以及 $\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{ikj}$ 等等。

此外，ϵ 函數與 δ 函數存在以下關係 (其中 $|\quad|$ 代表行列式)：

$$\epsilon_{i_1\ldots i_m}\epsilon_{j_1\ldots j_m}=\begin{vmatrix}\delta_{i_1j_1} & \cdots & \delta_{i_1j_m}\\ \vdots & & \\ \delta_{i_mj_1} & \cdots & \delta_{i_mj_m}\end{vmatrix} \qquad (20)$$

從上式可以證明以下重要等式 (請注意下式具有求和約定的形式，代表對指標 i 進行求和運算)：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{igh}=\begin{vmatrix}\delta_{jg} & \delta_{jh}\\ \delta_{kg} & \delta_{kh}\end{vmatrix}=\delta_{jg}\delta_{kh}-\delta_{jh}\delta_{kg} \qquad (21)$$

接下來介紹如何用求和約定改寫線性代數中的其他數式。在傳統線性代數中，若 A 是 $m\times m$ 方陣，則 A 的「行列式」(determinant) $\det(A)$ 等於 $\sum_{i_1=1}^m\cdots\sum_{i_m=1}^m\epsilon_{i_1\ldots i_m}A_{1,i_1}\ldots A_{m,i_m}$。運用求和約定，可以把上述結果寫成以下形式 ($i_1$、...、$i_m$ 在 1 和 m 之間取值)：

$$\det(A)=\epsilon_{i_1\ldots i_m}A_{1,i_1}\ldots A_{m,i_m} \qquad (22)$$

為驗證上式，以下讓我們用上式計算 2×2 方陣的行列式如下：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix} &= \epsilon_{11}A_{11}A_{21}+\epsilon_{12}A_{11}A_{22}+\epsilon_{21}A_{12}A_{21}+\epsilon_{22}A_{12}A_{22}\\ &= 0\times A_{11}A_{21}+1\times A_{11}A_{22}+(-1)\times A_{12}A_{21}+0\times A_{12}A_{22}\\ &= A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\end{aligned}$$

上述結果與傳統線性代數中 2×2 方陣的行列式公式一致。

有了行列式的公式 (22)，便可以用求和約定寫出線性代數中某些建基於行列式的概念的公式。設 $v = [v_1, v_2, v_3]$ 和 $w = [w_1, w_2, w_3]$ 為 3 維向量，則 v 與 w 的「叉積」(cross product) $v \times w$ 等於以下行列式 (為方便表達下文的公式，以下用 (e_1, e_2, e_3) 代表 $\mathbb{R}^3$ 的有序基底)：

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

由此根據 (22)，可以用求和約定寫出叉積的公式如下 (i、j 和 k 在 1 與 3 之間取值)：

$$v \times w = (\epsilon_{ijk} v_j w_k) e_i \qquad (23)$$

在上式中，e_i 是單位向量，所以我們根據通常的習慣把它放在最後位置，而括弧中的實數則是相對於這個單位向量的分量，因此從上式可以得到下式：

$$(v \times w)_i = \epsilon_{ijk} v_j w_k \qquad (24)$$

請注意在上式中，i 是自由指標 (j 和 k 則是虛擬指標)，而 $(v \times w)_i$ 代表 $v \times w$ 的第 i 個分量。舉例說，設 v 和 w 如上定義，那麼根據 (24)，可求得 $v \times w$ 的第 1 個分量如下：

$$\begin{aligned} (v \times w)_1 &= \epsilon_{1jk} v_j w_k \\ &= \epsilon_{111} v_1 w_1 + \epsilon_{112} v_1 w_2 + \epsilon_{113} v_1 w_3 \\ &\quad + \epsilon_{121} v_2 w_1 + \epsilon_{122} v_2 w_2 + \epsilon_{123} v_2 w_3 \\ &\quad + \epsilon_{131} v_3 w_1 + \epsilon_{132} v_3 w_2 + \epsilon_{133} v_3 w_3 \\ &= v_2 w_3 - v_3 w_2 \end{aligned}$$

上述結果與用傳統線性代數中叉積公式計算的結果一致。

除了點積和叉積外，向量代數中還有兩個三重積。設 $u = [u_1, u_2, u_3]$ 為 3 維向量，v 和 w 如上定義，則 u、v、w 的「純量三重積」(scalar triple product) 可定義為 $u \cdot (v \times w)$，其「向量三重積」(vector triple product) 則可定義為 $u \times (v \times w)$。以下讓我們用求和約定寫出這兩個三重積的計算公式。首先，根據 (17) 和 (24)，我們有[2]：

$$u \cdot (v \times w) \;=\; u_i (v \times w)_i$$

[2]根據線性代數，可以把純量三重積表示成以下行列式：

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

由此運用 (22)，也可得到 (25)。

$$
\begin{aligned}
&= u_i(\epsilon_{ijk}v_jw_k) \\
&= \epsilon_{ijk}u_iv_jw_k \qquad (25)
\end{aligned}
$$

其次，根據 (23) 和 (24)，我們有 (以下在運用 (24) 時，我們把 (24) 中的虛擬指標 i、j 和 k 分別改為 k、g 和 h)：

$$
\begin{aligned}
u \times (v \times w) &= (\epsilon_{ijk}u_j(v \times w)_k)e_i \\
&= (\epsilon_{ijk}u_j(\epsilon_{kgh}v_gw_h))e_i \\
&= (\epsilon_{ijk}\epsilon_{kgh}u_jv_gw_h)e_i \qquad (26)
\end{aligned}
$$

類似叉積的情況，我們可以從上式得到下式：

$$
(u \times (v \times w))_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kgh}u_jv_gw_h \qquad (27)
$$

請注意在上式中，i 是自由指標 (j、k、g 和 h 則是虛擬指標)，而 $(u\times(v\times w))_i$ 代表 $u \times (v \times w)$ 的第 i 個分量。

求和約定還可用來證明線性代數中的某些恆等式，例如

$$
u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \qquad (28)
$$

為證明上式，除了應用前面的結果外，還要用到向量的線性性質，這個性質是說，若 k 是實數，v 和 w 是向量，則 $(kv)_i = kv_i$ 以及 $(v + w)_i = v_i + w_i$。現證明上式如下：

$$
\begin{aligned}
& (u \times (v \times w))_i \\
=\;& \epsilon_{ijk}\epsilon_{kgh}u_jv_gw_h && \text{(根據 (27))} \\
=\;& \epsilon_{kij}\epsilon_{kgh}u_jv_gw_h && (\epsilon\text{ 函數的性質}) \\
=\;& (\delta_{ig}\delta_{jh} - \delta_{ih}\delta_{jg})u_jv_gw_h && \text{(根據 (21))} \\
=\;& \delta_{ig}\delta_{jh}u_jv_gw_h - \delta_{ih}\delta_{jg}u_jv_gw_h && \text{(乘法對加法的分配律)} \\
=\;& (u_j)(\delta_{jh}w_h)(\delta_{ig}v_g) - (u_j)(\delta_{jg}v_g)(\delta_{ih}w_h) && \\
=\;& u_jw_jv_i - u_jv_jw_i && (\delta\text{ 函數的性質}) \\
=\;& (u \cdot w)v_i - (u \cdot v)w_i && \text{(根據 (17))} \\
=\;& ((u \cdot w)v)_i - ((u \cdot v)w)_i && \text{(向量的線性性質)} \\
=\;& ((u \cdot w)v - (u \cdot v)w)_i && \text{(向量的線性性質)}
\end{aligned}
$$

以上證明了 (28) 等號左右兩端向量的第 i 個分量相等，由於 i 是任意分量，由此證得 (28) 等號左右兩端的向量相等。

連結至數學專題
連結至周家發網頁