數學示例：方程與解

微積分學和差和分學的一個重要課題是研究求解各種「微分／差分／積分／和分方程」的方法，本文主旨是介紹與這些方程有關的基本概念以及這些方程的一些重要類別。上述方程的共同點是，它們都是帶有未知函數的方程，而且這些未知函數都處於某類算子的作用之下，根據算子的類別，可以區分出不同種類的方程。

以下我們會討論兩種 m 元 ($m \geq 1$) 函數。第一種是以某個 m 元連續集合作為其定義域的 m 元函數，第二種是以 m 個離散集合的笛卡爾積 (例如 $\{a_1, a_1+1, a_1+2, \ldots\} \times \ldots \times \{a_m, a_m+1, a_m+2, \ldots\}$) 作為其定義域的 m 元函數。為方便討論，以下把這兩類函數分別稱為「連續 m 元函數」和「離散 m 元函數」。請注意我們在這裡規定離散函數各個輸入項的間距都是 1，這樣做並沒有對離散函數作出過強的限制，這是因為我們可以通過變項代換以改變離散函數輸入項的間距。舉例說，給定一個以 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 為定義域的函數 $f(x)$，可以把它改成以 $\{0, 5, 10, \ldots\}$ 為定義域的函數 $g(x)$，其中 g 與 f 具有變換關係 $g(x) = f(\frac{x}{5})$。

微分方程(differential equation) 的特點是其未知函數處於導數算子的作用之下。微分方程可分為兩大類：常微分方程(ordinary differential equation) 和偏微分方程(partial differential equation)。常微分方程可概括為具有以下形式的關係式：

$$\Phi(x, f(x), Df(x), D^2f(x), \ldots, D^nf(x)) = 0 \qquad (1)$$

其中 $f(x)$ 是未知連續 1 元函數，而 Φ 代表任意函數關係。如把上式中的 $f(x)$ 改為連續 m 元 ($m > 1$) 函數 $f(x_1, \ldots, x_m)$，並把其中的導數算子 D 改為偏導數算子 (如 D_{x_i}、$D_{x_ix_j}$ 等)，便會得到偏微分方程。舉例說，

$$x^2D^2f(x) - xDf(x) - 3f(x) = 0, \;\; x \in (0, \infty) \qquad (2)$$

便是常微分方程，而

$$D_{xx}f(x, y) - 2D_{xy}f(x, y) + D_{yy}f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

則是 2 元偏微分方程。

在 (2) 中，$x \in (0, \infty)$ 是對未知函數 $f(x)$ 的定義域的限定。為免繁冗，以下的微分／積分方程如無註明，其未知函數的定義域均假設為 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 的笛卡爾積。類似地，以下的差分／和分方程如無註明，其未知函數的定義域均假設為 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 或 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 的笛卡爾積。

除了根據導數算子的性質為微分方程分類外，也可根據導數算子的「階」區分不同「階」的微分方程。一個微分方程的階(order) 是指出現於該方程的最高階導數算子的階，例如 (2) 和 (3) 都是 2 階方程 (因為 (2) 中的最高階導數算子是 D^2，而 (3) 中的最高階導數算子是 D_{xx}、D_{xy} 和 D_{yy})。

差分方程(difference equation) 的特點是其未知函數處於移位或差分算子的作用之下。跟微分方程相似，差分方程也可分為兩大類：常差分方程(ordinary difference equation) 和偏差分方程(partial difference equation)。常差分方程可概括為具有以下形式的關係式：

$$\Phi(x, f(x), Ef(x), E^2 f(x), \ldots, E^n f(x)) = 0 \qquad (4)$$

其中 $f(x)$ 是未知離散 1 元函數。由於移位算子 E 與差分算子 Δ 存在簡單關係 $\Delta = E - I$ (即《數學示例：微分與差分》中的 (6))，也可以把常差分方程概括為以下形式：

$$\Phi(x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)) = 0 \qquad (5)$$

如把 (4) 或 (5) 中的 $f(x)$ 改為離散 m 元函數 $f(x_1, \ldots, x_m)$，並把其中的移位算子 E 或差分算子 Δ 改為偏移位算子 (如 E_{x_i}、$E_{x_i x_j}$ 等) 或偏差分算子 (如 Δ_{x_i}、$\Delta_{x_i x_j}$ 等)，便會得到偏差分方程。舉例說，

$$E^2 f(x) + Ef(x) - 2f(x) = 0 \qquad (6)$$

便是常差分方程，而

$$E_x f(x, y, z) - E_y f(x, y, z) - E_z f(x, y, z) = 0 \qquad (7)$$

則是 3 元偏差分方程。

差分方程又稱「遞推關係式」(recurrence relation)，常遞推關係式通常以

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+n)) = 0 \qquad (8)$$

的形式出現，而上述形式的常遞推關係式較容易改寫成 (4) 這種形式的常差分方程 (因為 $f(x+i)$ 正好等於 $E^i f(x)$)。舉例說，給定以下常遞推關係式：

$$f(x+2) + f(x+1) - 2f(x) = 0 \qquad (9)$$

我們可即時把上式改寫成具有 (4) 形式的差分方程 (6)。反之，如要把上式改寫成具有 (5) 形式的差分方程，便要先把上式中的 $f(x+i)$ 改為 $(\Delta+I)^i$，然後進行化簡，才能得到下式：

$$\Delta^2 f(x) + 3\Delta f(x) = 0 \qquad (10)$$

從以上討論可見，遞推關係式在形式上跟 (4) 接近而跟 (5) 有較大差異。因此之故，我們將較多使用 (4) 這種形式。惟請注意，在某些情況下，也要使用 (5) 這種形式，因此讀者須能掌握 (4) 和 (5) 這兩種形式的相互轉換關係。

類似微分方程的情況，也可區分不同階的差分方程，但其定義跟微分方程不同。一個常差分方程的階是指出現於該方程的最高階和最低階「移位算子」(而非「差分算子」) 的階之差 (請注意由於 $I = E^0$，恆等算子 I 可被看成 0 階移位算子)。舉例說，在 (6) 中，最高階和最低階移位算子分別為 E^2 和 I，因此該方程的階是 $2-0=2$。

對於偏差分方程，則要確定方程中每個論元的階 (而非整個方程的階)。設某偏差分方程的未知函數 $f(x_1,\ldots,x_m)$ 包含 m 個論元，為準確確定該方程中每個論元的階，要把方程中每個涉及 $f(x_1,\ldots,x_m)$ 的項寫成 $\phi_1\ldots\phi_m f(x_1,\ldots,x_m)$ 的形式，其中 ϕ_i 代表有關論元 x_i 的移位算子 (可以是 I_{x_i})。以 (7) 為例，先把它改寫成以下形式：

$$E_x I_y I_z f(x,y,z) - I_x E_y I_z f(x,y,z) - I_x I_y E_z f(x,y,z) = 0$$

上式中的每一項都具有前述 $\phi_1\phi_2\phi_3 f(x,y,z)$ 的形式。現在可以看到，就論元 x 而言，上式中最高階和最低階移位算子的階分別為 1 和 0，因此該方程的論元 x 的階是 $1-0=1$。容易看到，論元 y 和 z 的階也各是 1。

積分方程(integral equation) 的特點是其未知函數處於定積分算子的作用之下。由於我們對積分方程的認識不多，以下只能介紹具有以下特定形式的積分方程[1]：

$$f(x) + \int_{t=a}^{t=b(x)} K(x,t)\Phi(f(t)) + g(x) = 0 \qquad (11)$$

在上式中，$f(x)$ 是未知連續函數，a 是常數，$b(x)$、$g(x)$ 和 $K(x,t)$ 都是已知的連續函數，其中 $K(x,t)$ 稱為積分方程的核(kernel)，而 Φ 代表任意函數關係。請注意上式中的定積分算子是關於變項 t 的「偏積分」算子，因

[1]確切地說，以下介紹的積分／和分方程應稱為「第二類積分／和分方程」(integral / summation equation of the second kind)，但由於我們不會介紹其他類別的積分／和分方程，以下只把這些方程簡單稱為「積分／和分方程」。

此在進行這個定積分運算後，$\int_{t=a}^{t=b(x)} K(x,t)\Phi(f(t))$ 等於某個僅以 x 作為變項的 1 元函數或常數，因而可與 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相加。在 (11) 中，若積分的上限 $b(x)$ 是常數，有關方程稱為弗雷德霍姆積分方程(Fredholm integral equation)；若 $b(x)$ 不是常數，有關方程則稱為沃爾泰拉積分方程(Volterra integral equation)。

舉例說，

$$f(x) - \int_{t=0^+}^{t=1} \ln(xt)f(t) - 1 = 0, \ \ x \in (0, \infty) \qquad (12)$$

便是弗雷德霍姆積分方程，因為其積分上限是常數，其核為 $-\ln(xt)$，而

$$f(x) - \int_{t=0}^{t=x} (t-x)f(t) - 1 = 0 \qquad (13)$$

則是沃爾泰拉積分方程，因為其積分上限不是常數，其核為 $x - t$。由於這裡介紹的積分方程全都只包含一重積分算子，無需區分不同階的積分方程。

和分方程(summation equation) 的特點是其未知函數處於定和分算子的作用之下。類似積分方程的情況，以下只能介紹具有以下特定形式的和分方程：

$$f(x) + \sum_{t=a}^{t=b(x)} K(x,t)\Phi(f(t)) + g(x) = 0 \qquad (14)$$

在上式中，$f(x)$ 是未知離散函數，a 是常數，$b(x)$、$g(x)$ 和 $K(x,t)$ 都是已知的離散函數，而 Φ 代表任意函數關係。沿用與積分方程相關的術語，以下把上式中的 $K(x,t)$ 稱為和分方程的「核」。同樣，若和分的上限 $b(x)$ 是常數，有關方程稱為弗雷德霍姆和分方程(Fredholm summation equation)；若 $b(x)$ 不是常數，則有關方程稱為沃爾泰拉和分方程(Volterra summation equation)。

舉例說，

$$f(x) - \sum_{t=0}^{t=4} (1+xt)f(t) - 1 = 0 \qquad (15)$$

便是弗雷德霍姆和分方程，因為其和分上限是常數，其核為 $-(1+xt)$，而

$$f(x) - \sum_{t=0}^{t=x-1} 16(x-t-1)f(t) - 1 = 0 \qquad (16)$$

則是沃爾泰拉和分方程，因其和分上限不是常數，其核為 $-16(x-t-1)$。由於這裡介紹的和分方程全都只包含一重和分算子，無需區分不同階的和

分方程。

接下來介紹上述各類方程的一個重要子類，其概念來自多項式方程中的「次數」概念。如果某個多項式方程的每一項都只包含最多一個自變項的 1 次冪或常數，這個方程是線性(linear) 的 (因為這類方程的圖象呈現為直線)，否則是非線性(non-linear) 的[2]。我們可以把上述概念推廣到微分／差分方程，方法是把微分／差分方程中的 f、ϕf、$\phi^2 f$、$\phi^3 f$、... (其中 ϕ 代表導數／差分／移位算子) 當作多項式方程中的自變項處理。讀者請自行驗證，前面列出的微分／差分方程都是線性的。以 (2) 為例，這個方程的每一項都是 $D^2f(x)$、$Df(x)$ 或 $f(x)$ 的 1 次冪與自變項／常數 (即 x^2、$-x$ 和 -3) 的乘積，所以 (2) 是線性的。反之，

$$Ef(x) - f(x) + xf(x)Ef(x) = 0 \qquad (17)$$

則是非線性的，因為它的第三項包含 $f(x)$ 與 $Ef(x)$ 的乘積。

接著把上述概念推廣到積分／和分方程。在 (11) 和 (14) 中，如果 $\Phi(f(t))$ 代表以 $f(t)$ 作為變項的 1 次多項式，那麼 (11) 和 (14) 是線性的。讀者請自行驗證，前面列出的積分／和分方程都是線性的。反之，

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=1} xt(f(t))^2 - \frac{7}{8}x = 0 \qquad (18)$$

則是非線性的，因為在這個方程中，$(f(t))^2$ 是 $f(t)$ 的 2 次冪。

我們還可對線性方程作進一步的細分。如果一個線性方程的每一項都包含導數／差分／移位／積分／和分算子而非純粹自變項／常數，這個方程是齊次(homogeneous) 的，否則是非齊次(inhomegeneous) 的。讀者請自行驗證，在前面討論過的線性方程中，(2)、(3)、(6) 和 (7) 都是齊次的，而 (12)、(13)、(15) 和 (16) 則是非齊次的。

接下來介紹上述方程的「解」的概念，一個微分／差分／積分／和分方程的解(solution) 是指一個滿足有關方程的具體函數 f。容易看到，$f = 0$ 是齊次方程的一個解 (儘管未必是唯一解)，這樣的解稱為平凡解(trivial solution)。當然也有一些方程有「非平凡解」，以 (16) 為例，這個方程的解是

$$f(x) = \frac{1}{2}\times(-3)^x + \frac{1}{2}\times 5^x \qquad (19)$$

為驗證這一點，首先用「分部和分法」計算 $\sum_{t=0}^{t=x-1} 16(x-t-1)f(t)$。為此，設定 $h(t) = 16(x-t-1)$，$\Delta g(t) = \frac{1}{2}\times(-3)^t + \frac{1}{2}\times 5^t$，由此有 $\Delta h(t) = -16$，

[2] 惟請注意，此一「線性方程」概念跟泛函分析中的「線性算子」概念 (參見《數學示例：線性算子》) 有所不同。另外，接下來要介紹的「齊次」概念也有其他定義。筆者認為，我們實應為有不同定義的概念取不同的名稱，但由於已約定俗成，所以這裡只好從俗。

$g(t) = -\frac{1}{8} \times (-3)^t + \frac{1}{8} \times 5^t$。接著運用《數學示例：積分／和分運算法則中的「定理 4」，可求得

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{t=x-1} 16(x-t-1)f(t) \\
= \quad & \left[2(x-t-1)(-(-3)^t + 5^t)\right]_{t=0}^{t=x} + \sum_{t=0}^{t=x-1} (-2 \times (-3)^{t+1} + 2 \times 5^{t+1}) \\
= \quad & 2 \times (-3)^x - 2 \times 5^x + \left[\frac{1}{2} \times (-3)^{t+1} + \frac{1}{2} \times 5^{t+1}\right]_{t=0}^{t=x} \\
= \quad & \frac{1}{2} \times (-3)^x + \frac{1}{2} \times 5^x - 1 \qquad (20)
\end{aligned}$$

接著把 (19) 和 (20) 代入 (16)，

$$\begin{aligned}
& f(x) - \sum_{t=0}^{t=x-1} 16(x-t-1)f(t) - 1 \\
= \quad & \frac{1}{2} \times (-3)^x + \frac{1}{2} \times 5^x - \left(\frac{1}{2} \times (-3)^x + \frac{1}{2} \times 5^x - 1\right) - 1 \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

至此證得 (19) 確是 (16) 的解。

某些方程有不只一個解，以至無窮個解。對於有無窮個解的方程，要以適當的任意常數／函數表達其所有解，這種形式稱為有關方程的通解(general solution)。一般來說，常微分／差分方程的通解包含任意常數。舉例說，以下兩式分別是 2 階常微分方程 (2) 和 2 階常差分方程 (6) 的通解：

$$f(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^3 \qquad (21)$$

$$f(x) = c_1(-2)^x + c_2 \qquad (22)$$

以上兩式各包含兩個任意常數 c_1 和 c_2。把任何常數代入 c_1 和 c_2，所得結果，例如 $f(x) = 0$、$f(x) = -x^{-1} + (3x)^3$ 等，都是 (2) 的解，而 $f(x) = (-2)^{x+1}$、$f(x) = \pi((-2)^x + 1)$ 等，則都是 (6) 的解。

m 元偏微分／差分方程的通解則包含任意 $m-1$ 元函數。舉例說，以下是 2 元偏微分方程 (3) 的通解：

$$f(x, y) = h_1(x+y) + yh_2(x+y) \qquad (23)$$

上式包含兩個任意 1 元函數 $h_1(x+y)$ 和 $h_2(x+y)$，即把 $x+y$ 代入任意二次可微函數 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 中的 t 所得的結果，例如 $f(x, y) = \sin^2(3(x+y)) + y$、

$f(x,y)=(x+y)^2+\frac{y}{x+y}$ 等，都是 (3) 的解。以下則是 3 元偏差分方程 (7) 的通解：

$$f(x,y,z)=\sum_{n=0}^{x} C(x,n)h(x+y-n,z+n) \qquad (24)$$

上式包含二項式係數 $C(x,n)=\frac{x!}{n!(x-n)!}$ 和任意 2 元函數 $h(x+y-n,z+n)$。為驗證 (24) 的通解性質，一方面把 (24) 的右端代入 (7) 中的 $E_x f(x,y,z)$，並運用二項式係數的定義以及「帕斯卡定律」(Pascal's rule) $C(x+1,n)=C(x,n)+C(x,n-1)$ 將之改寫如下：

$$\begin{aligned}
&E_x f(x,y,z)\\
=\;&\sum_{n=0}^{x+1} C(x+1,n)h(x+y-n+1,z+n)\\
=\;&h(x+y+1,z)+\sum_{n=1}^{x} C(x+1,n)h(x+y-n+1,z+n)+h(y,z+x+1)\\
=\;&h(x+y+1,z)+\sum_{n=1}^{x} C(x,n)h(x+y-n+1,z+n)\\
&+\sum_{n=1}^{x} C(x,n-1)h(x+y-n+1,z+n)+h(y,z+x+1) \qquad (25)
\end{aligned}$$

另一方面又把 (24) 的右端代入 (7) 中的 $-E_y f(x,y,z)-E_z f(x,y,z)$，並將之改寫如下：

$$\begin{aligned}
&-E_y f(x,y,z)-E_z f(x,y,z)\\
=\;&-\sum_{n=0}^{x} C(x,n)h(x+y-n+1,z+n)-\sum_{n=0}^{x} C(x,n)h(x+y-n,z+n+1)\\
=\;&-h(x+y+1,z)-\sum_{n=1}^{x} C(x,n)h(x+y-n+1,z+n)\\
&-\sum_{n=0}^{x-1} C(x,n)h(x+y-n,z+n+1)-h(y,z+x+1)\\
=\;&-h(x+y+1,z)-\sum_{n=1}^{x} C(x,n)h(x+y-n+1,z+n)\\
&-\sum_{m=1}^{x} C(x,m-1)h(x+y-m+1,z+m)-h(y,z+x+1) \qquad (26)
\end{aligned}$$

上面最後一行用了等式 $n=m-1$ 改寫其中一個求和運算的變項。把 (25) 和 (26) 相加，其結果等於 0，由此可見 (24) 確是 (7) 的通解。

以上介紹的方程都包含數式以及對未知函數 f 的定義域的限定。此外，這些方程還可帶有針對 f 的某些值的特定條件，這些條件的作用是收窄解的範圍。給定某個方程的通解和特定條件，我們可以把這些特定條件代入通解中。如能因此消去通解中的任意實數或函數，便可得到該方程的唯一解，稱為特解(particular solution)。以下集中介紹兩類特定條件。

第一類特定條件是初始條件(initial condition)，以下以 2 階常微分／差分方程為例闡述這種條件 (不難推廣到其他階的方程)，這類方程的初始條件具有以下一般形式：

$$f(a) = k_0, \phi f(a) = k_1 \qquad (27)$$

在上式中，ϕ 代表 D 或 E，a 是 f 的定義域的起始點，k_0 和 k_1 則是給定的實數。一個帶有初始條件的方程稱為初值問題(initial value problem)。舉例說，我們可以為 (6) 添加初始條件，使之成為以下初值問題：

$$E^2 f(x) + Ef(x) - 2f(x) = 0, \;\; f(0) = -2, Ef(0) = -8 \qquad (28)$$

前面說過，(6) 的通解是 (22) 中的函數 $f(x)$，為求上述初值問題的特解，先求 $Ef(x)$ 如下：

$$Ef(x) = -2c_1(-2)^x + c_2 \qquad (29)$$

然後把 (28) 的兩個初始條件代入 (22) 和 (29)，從而得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -2 \\ -2c_1 + c_2 = -8 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $c_1 = 2, c_2 = -4$，由此可知 (28) 的特解為

$$f(x) = 2(-2)^x - 4 \qquad (30)$$

第二類特定條件是邊界條件(boundary condition)，以下以 2 階常微分／差分方程為例闡述這種條件 (不難推廣到其他階的方程)，這類方程的邊界條件具有以下一般形式：

$$\begin{aligned} a_{11}f(a) + a_{12}\phi f(a) + b_{11}f(b) + b_{12}\phi f(b) = k_1, \\ a_{21}f(a) + a_{22}\phi f(a) + b_{21}f(b) + b_{22}\phi f(b) = k_2 \end{aligned} \qquad (31)$$

在上式中，ϕ 代表 D 或 E，a 和 b 是 f 的定義域的邊界點，a_{11}、...、b_{22}、k_1 和 k_2 則是給定的實數。一個帶有邊界條件的方程稱為邊值問題(boundary value problem)。舉例說，我們可以為 (2) 添加邊界條件，使之成為以下邊值問題：

$$x^2D^2f(x) - xDf(x) - 3f(x) = 0, \;\; x \in (1, 2), \;\; f(1) + Df(1) = 4, f(2) = \frac{15}{2} \qquad (32)$$

請注意在上式中，未知函數 f 的定義域不包括邊界點 1 和 2，但其邊界條件卻可包含 f 或 Df 在這兩點上的值。前面說過，(2) 的通解是 (21) 中的函數 $f(x)$，為求上述邊值問題的特解，先求 $Df(x)$ 如下：

$$Df(x) = -c_1x^{-2} + 3c_2x^2 \qquad (33)$$

然後把 (32) 的兩個邊界條件代入 (21) 和 (33)，從而得到以下方程組：

$$\begin{cases} 4c_2 = 4 \\ \frac{1}{2}c_1 + 8c_2 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

解上述方程組，得 $c_1 = -1, c_2 = 1$，由此可知 (32) 的特解為

$$f(x) = -x^{-1} + x^3 \qquad (34)$$

對於 (1 元) 常微分／差分方程而言，其初始／邊界條件可被看成有關未知函數的定義域邊緣的某個 0 元集合 (即點集合) 的條件。由此類推，對於 m 元偏微分／差分方程而言，其初始／邊界條件應是有關未知函數的定義域邊緣的某些 $m-1$ 元集合的條件。以 3 元偏差分方程 (7) 為例，我們可以為它添加有關 $x=0$ (在 3 維空間上，$x=0$ 代表 2 維平面) 的初始條件，使之成為以下初值問題：

$$E_xf(x,y,z) - E_yf(x,y,z) - E_zf(x,y,z) = 0,\ \ f(0,y,z) = y+z \qquad (35)$$

前面說過，(7) 的通解是 (24) 中的函數 $f(x,y,z)$，為求上述問題的特解，我們把上述條件代入 (24)，從而得到

$$h(y,z) = y+z$$

從上述結果我們有 $h(x+y-n, z+n) = x+y+z$，由此可知 (35) 的特解為 (以下要應用恆等式 $\sum_{n=0}^{x} C(x,n) = 2^x$)：

$$f(x,y,z) = 2^x(x+y+z) \qquad (36)$$

另外又如 2 元偏微分方程 (3)，我們可以為它添加有關邊界線 $x=0$ 和 $y=1$ 的邊界條件，使之成為以下邊值問題：

$$D_{xx}f(x,y) - 2D_{xy}f(x,y) + D_{yy}f(x,y) = 0,\ \ x,y \in (0,1),\ \ f(x,0) = 0, f(1,y) = y^2 \qquad (37)$$

前面說過，(3) 的通解是 (23) 中的函數 $f(x,y)$，為求上述問題的特解，我們把上述兩個條件代入 (23)，從而得到以下方程組：

$$\begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_1(1+y) + yh_2(1+y) = y^2 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $h_1(t)=0, h_2(t)=t-1$。從上述結果我們有 $h_1(x+y)=0, h_2(x+y)=x+y-1$，由此可知 (37) 的特解為

$$f(x,y)=y(x+y-1) \qquad (38)$$

其實 m 元偏微分／差分方程也可以定義域上的較低元 (即低於 $m-1$ 元) 集合作為初始／邊界條件。但這樣的條件一般不能讓我們得到唯一的特解。仍以 (3) 為例，設我們為它添加有關點 $(0,0)$ 的初始條件，使之成為以下初值問題：

$$D_{xx}f(x,y)-2D_{xy}f(x,y)+D_{yy}f(x,y)=0,\ \ f(0,0)=1 \qquad (39)$$

把上述條件代入 (3) 的通解 (23)，可得到

$$h_1(0)=1$$

把上述結果加入到 (23) 中，便可得到 (39) 的特解如下：

$$f(x,y)=h_1(x+y)+yh_2(x+y), \text{其中 } h_1(t) \text{ 須滿足} h_1(0)=1 \qquad (40)$$

上述結果顯示，把任何滿足 $h_1(0)=1$ 的函數 (例如 $h_1(t)=1$、$h_1(t)=e^t$ 等) 代入上式的第一部分，都是 (39) 的特解，因此有無窮個函數 (例如 $f(x,y)=1+y$、$f(x,y)=e^{x+y}+\frac{y}{x+y+1}$ 等) 是 (39) 的特解。

請注意即使常微分／差分方程初值／邊值問題也不一定有唯一解。事實上，某些初值／邊值問題沒有解，某些則有多於一個解。舉例說，考慮以下常微分方程初值問題：

$$Df(x)-x\sqrt{f(x)}=0,\ \ f(0)=0 \qquad (41)$$

讀者請自行驗證，在略去初始條件後，上述方程的通解是

$$f(x)=0 \text{ 或 } f(x)=\frac{x^4}{16}+c \qquad (42)$$

為求 (41) 的特解，我們把 (41) 中的條件代入 (42) 中的兩個函數，從而得到以下兩式：

$$0=0$$

$$c=0$$

上面第一式必真，顯示 $f(x)=0$ 是 (41) 的特解。上面第二式告訴我們 $f(x)=\frac{x^4}{16}$ 也是 (41) 的特解。總括而言，(41) 有以下兩個特解：

$$f(x)=0 \text{ 或 } f(x)=\frac{x^4}{16} \qquad (43)$$

其次考慮以下常差分方程邊值問題：

$$2E^2f(x)-f(x)-3x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+6\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0,\ \ x\in\{0,1,2,(3,4)\},$$
$$f(0)=0, f(4)=0 \qquad (44)$$

請注意上述方程的定義域寫成 $x\in\{0,1,2,(3,4)\}$ 的形式，代表自變項 x 主要在 $\{0,1,2\}$ 內取值，但在計算 $E^2f(1)\,(=f(3))$ 和 $E^2f(2)\,(=f(4))$ 的值以及確定 (44) 的邊界條件時，還需要 $f(3)$ 和 $f(4)$ 的值，因此 3 和 4 可被看成上述方程的「附加論域」，被置於 ( ) 內。讀者請自行驗證，在略去邊界條件後，上述方程的通解是

$$f(x)=c_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x+c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x+\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (45)$$

為求上述邊值問題的特解，我們把 (44) 的兩個邊界條件代入 (45)，從而得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1+c_2=-2 \\ \frac{1}{4}c_1+\frac{1}{4}c_2=-2 \end{cases}$$

上述兩個方程互相矛盾，因此 (44) 沒有解。

以上介紹的都是單個的方程，但我們也可以考慮包含多個未知方程的方程組(system of equations，亦稱「聯立方程」simultaneous equation)，而且可以把前述的分類法和術語推廣應用到方程組。舉例說，以下是含有兩個未知 1 元函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 1 階 1 元線性常微分方程組初值問題：

$$\begin{cases} Df(x)-2f(x)-3g(x)=0 \\ Dg(x)-2f(x)-g(x)=0 \end{cases},\quad f(0)=2, g(0)=3 \qquad (46)$$

一個包含 n 個未知函數的方程組的解是指 n 個滿足該方程組的具體函數。舉例說，在略去初始條件後，上述方程組的通解是：

$$f(x)=c_1e^{-x}+3c_2e^{4x},\ \ g(x)=-c_1e^{-x}+2c_2e^{4x} \qquad (47)$$

為驗證這一點，先求 $Df(x)$ 和 $Dg(x)$ 如下：

$$Df(x)=-c_1e^{-x}+12c_2e^{4x},\ \ Dg(x)=c_1e^{-x}+8c_2e^{4x} \qquad (48)$$

然後進行以下計算：

$$\begin{aligned} Df(x)-2f(x)-3g(x) &= -c_1e^{-x}+12c_2e^{4x}-2c_1e^{-x}-6c_2e^{4x}+3c_1e^{-x}-6c_2e^{4x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dg(x) - 2f(x) - g(x) &= c_1e^{-x} + 8c_2e^{4x} - 2c_1e^{-x} - 6c_2e^{4x} + c_1e^{-x} - 2c_2e^{4x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

為解出 (47) 中的任意常數 c_1 和 c_2，把 (46) 的兩個初始條件代入 (47)，從而得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $c_1 = -1, c_2 = 1$，由此可知 (46) 的特解為

$$f(x) = -e^{-x} + 3e^{4x},\ \ g(x) = e^{-x} + 2e^{4x} \qquad (49)$$

研究方程組的重要意義還在於，高階線性常微分／差分方程可以改寫成 1 階線性常微分／差分方程組的形式，因此對 1 階方程組的求解方法可用來求解高階方程，反之亦然。設有 n 階線性常微分／差分方程

$$a_n(x)\phi^n f(x) + a_{n-1}(x)\phi^{n-1} f(x) + \ldots + a_1(x)\phi f(x) + a_0(x)f(x) + g(x) = 0 \qquad (50)$$

其中 ϕ 代表 D 或 E，如果設定 $u_0(x) = f(x)$，$u_1(x) = \phi f(x)$，...，$u_{n-1}(x) = \phi^{n-1}f(x)$，那麼 (50) 可轉化為以下方程組：

$$\begin{cases} \phi u_0(x) - u_1(x) = 0 \\ \phi u_1(x) - u_2(x) = 0 \\ \ldots \\ \phi u_{n-2}(x) - u_{n-1}(x) = 0 \\ a_n(x)\phi u_{n-1}(x) + a_{n-1}(x)u_{n-1}(x) + \ldots + a_1(x)u_1(x) + a_0(x)u_0(x) + g(x) = 0 \end{cases} \qquad (51)$$

以前面討論過的 2 階常差分方程初值問題 (28) 為例，根據上段的討論，我們設定 $u_0(x) = f(x)$，$u_1(x) = Ef(x)$，由此可把 (28) 轉化為以下方程組：

$$\begin{cases} Eu_0(x) - u_1(x) = 0 \\ Eu_1(x) + u_1(x) - 2u_0(x) = 0 \end{cases},\ \ u_0(0) = -2, u_1(0) = -8 \qquad (52)$$

由於我們在 (30) 已求得 (28) 的解，因此 (30) 中的函數及其移位就是上述方程組的解，即

$$u_0(x) = 2(-2)^x - 4,\ \ u_1(x) = -4(-2)^x - 4 \qquad (53)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁