數學示例：基本解集

我們在《數學示例：方程與解》中介紹了各種類型的微分／差分／積分／和分方程，其中「常係數齊次常微分／差分方程」(以下簡稱「常係數齊次方程」) 是較為簡單的方程，本文主旨是介紹這類簡單方程的一般求解方法。

常係數(constant coefficient) 方程是指其係數全為常數的方程。「齊次」方程 (作為「線性」方程的子類) 的一般定義已在上述網頁提供，就微分／差分方程而言，這是指一個只包含 $f(x)$、$\phi f(x)$、$\phi^2 f(x)$、$\phi^3 f(x)$、... (其中 ϕ 代表導數算子 D 或移位算子 E) 而不包含其他常項的線性方程。一個 n 階常係數齊次方程可以寫成以下一般形式：

$$k_n\phi^n f(x) + \ldots + k_1\phi f(x) + k_0 f(x) = 0 \qquad (1)$$

在上式中，k_i $(0 \leq i \leq n)$ 是 $\phi^i f(x)$ 的「係數」，本文假設它們全都是常數。上述方程也可寫成以下形式：

$$Tf(x) = 0,\ \text{其中} T = k_n\phi^n + \ldots + k_1\phi + k_0 I \qquad (2)$$

在上式中，T 是作用於未知函數 $f(x)$ 的算子，也可被看成以 ϕ 作為不定項的 n 次多項式。

在介紹具體求解方法前，讓我們先介紹一個重要事實：一個 n 階齊次方程 (不一定是常係數方程) 的所有解構成 $\mathbb{R}$ 上的一個 n 維「向量空間」(vector space)[1]，以下把此一空間稱為有關方程的解空間(solution space)。根據向量代數的知識，一個向量空間的任何成員都可以表示成該空間的「基底向量」(basis vector) 的「線性組合」(linear combination)，而一個 n 維向量空間中的任何 n 個線性獨立的向量都構成該空間的基底。因此如要確定某個 n 階齊次方程的「通解」，只須找出該方程的 n 個線性獨立的解，這些解構成該方程的基本解集(fundamental solution set)，亦即該方程「解空間」的基底。換句話說，如果 $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ 是 (2) 的基本解集，那麼 (2) 的通解可以寫成以下形式：

$$c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x) \qquad (3)$$

[1]請參閱《感受伽羅瓦：向量空間與子域》中有關「向量空間」的介紹。

其中 c_1、...、c_n 是任意常數。

接下來介紹一元函數的「線性相關／獨立性」的定義，此一定義乃由向量代數中的同一概念推廣而來。設 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 為 n 個以集合 S 為定義域的一元函數，若存在不全為 0 的實數 a_1、...、a_n 使得對任何 $x \in S$，都有 $a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x) = 0$，我們便說這些函數是線性相關(linearly dependent) 的，否則是線性獨立(linearly independent) 的。舉例說，以 $\mathbb{R}$ 為定義域的函數 $f(x) = e^{3x}$ 與 $g(x) = 2e^{3x}$ 是線性相關的，因為對任何 $x \in \mathbb{R}$，都有 $2f(x) - g(x) = 0$。

可是，根據上述定義去判斷一組函數的「線性相關／獨立性」頗為不便。幸好當有關函數是齊次常微分／差分方程時，我們有簡便的判斷方法。對於常微分方程，我們有以下定理。

定理 1：設 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 為以連續集合 S 為定義域的函數，並且是某個齊次常微分方程的解，現定義其朗斯基行列式(Wronskian) 如下：

$$W[f_1, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ Df_1(x) & \ldots & Df_n(x) \\ \vdots & & \\ D^{n-1}f_1(x) & \ldots & D^{n-1}f_n(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

則以下命題等價：

(i) $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 是線性相關的

(ii) 對所有 $x \in S$，都有 $W[f_1, \ldots, f_n](x) = 0$

(iii) 對至少一個 $x \in S$，$W[f_1, \ldots, f_n](x) = 0$

上述定理的重要性在於，為證明作為某個微分方程的解的函數 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 是線性相關的，只須從 (ii) 和 (iii) 這兩個命題中選取較易證明的一個。反之，為證明函數 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 是線性獨立的，則只項從 (ii) 和 (iii) 的否定命題中選取較易證明的一個。

如果某個齊次常微分方程的解包含不同類型的初等函數，那麼這些解是互相線性獨立的。舉例說，假設以 $\mathbb{R}$ 為定義域的函數 $f(x) = e^x$、$g(x) = \sin x$ 和 $h(x) = \cos x$ 是某個齊次常微分方程的解，根據 (4)，這三個解的朗斯基行列式可計算如下：

$$W[f, g, h](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ Df(x) & Dg(x) & Dh(x) \\ D^2f(x) & D^2g(x) & D^2h(x) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos x \\ e^x & \cos x & -\sin x \\ e^x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} \\
&= -2e^x
\end{aligned}
$$

由於對任何 $x \in \mathbb{R}$，$-2e^x \neq 0$，根據「定理 1(iii)」，可知上述三個函數是線性獨立的。不僅不同類型的函數會構成線性獨立的解，同一類型但其參數不同的函數也會構成線性獨立的解。舉例說，假設以 $\mathbb{R}$ 為定義域的函數 $f(x) = \sin(2x)$ 和 $g(x) = \sin(3x)$ 是某個齊次常微分方程的解，這兩個解的朗斯基行列式可計算如下：

$$
\begin{aligned}
W[f,g](x) &= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ Df(x) & Dg(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin(2x) & \sin(3x) \\ 2\cos(2x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} \\
&= 3\sin(2x)\cos(3x) - 2\cos(2x)\sin(3x)
\end{aligned}
$$

接著把 1 代入上式中的 x，可得

$$
W[f,g](1) = 3\sin 2\cos 3 - 2\cos 2\sin 3 \neq 0
$$

至此我們找到至少一個 $x \in \mathbb{R}$，使得 $W[f,g](x) \neq 0$，由此根據「定理 1(ii)」，可知上述兩個解是線性獨立的。

對於常差分方程，我們有以下定理。

定理 2：設 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 為以離散集合 S 為定義域的函數，並且是某個齊次常差分方程的解，現定義其卡索拉蒂行列式(Casoratian) 如下：

$$
C[f_1, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ Ef_1(x) & \ldots & Ef_n(x) \\ \vdots & & \\ E^{n-1}f_1(x) & \ldots & E^{n-1}f_n(x) \end{vmatrix} \tag{5}
$$

則以下命題等價：

(i) $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 是線性相關的

(ii) 對所有 $x \in S$，都有 $C[f_1, \ldots, f_n](x) = 0$

(iii) 對至少一個 $x \in S$，$C[f_1, \ldots, f_n](x) = 0$

上述定理與「定理 1」非常相似，因此可以運用相同的原理證明某些作為差分方程的解的函數是線性相關或線性獨立的。

類似微分方程的情況，如果某個齊次常差分方程的解包含不同類型的初等函數，那麼這些解是互相線性獨立的。舉例說，假設以 $\{0,1,2,\ldots\}$ 為定義域的函數 $f(x)=2^x$、$g(x)=\sin x$ 和 $h(x)=\cos x$ 是某個齊次常差分方程的解，根據 (5)，這三個解的卡索拉蒂行列式可計算如下[2]：

$$\begin{aligned}
& C[f,g,h](x) \\
= & \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ Ef(x) & Eg(x) & Eh(x) \\ E^2f(x) & E^2g(x) & E^2h(x) \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 2^x & \sin x & \cos x \\ 2\times 2^x & \cos 1\sin x+\sin 1\cos x & \cos 1\cos x-\sin 1\sin x \\ 4\times 2^x & \cos 2\sin x+\sin 2\cos x & \cos 2\cos x-\sin 2\sin x \end{vmatrix} \\
= & 2^x(\sin 1\cos 2-\sin 2\cos 1+2\sin 2-4\sin 1)
\end{aligned}$$

由於對任何 $x\in\{0,1,2,\ldots\}$，$2^x(\sin 1\cos 2-\sin 2\cos 1+2\sin 2-4\sin 1)\neq 0$，根據「定理 2(iii)」，可知上述三個函數是線性獨立的。不僅不同類型的函數會構成線性獨立的解，同一類型但其參數不同的函數也會構成線性獨立的解。舉例說，假設以 $\{0,1,2,\ldots\}$ 為定義域的函數 $f(x)=3^x$ 和 $g(x)=5^x$ 是某個齊次常差分方程的解，這兩個解的卡索拉蒂行列式可計算如下：

$$\begin{aligned}
C[f,g](x) &= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ Ef(x) & Eg(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3^x & 5^x \\ 3\times 3^x & 5\times 5^x \end{vmatrix} \\
&= 2\times 15^x
\end{aligned}$$

由於對任何 $x\in\{0,1,2,\ldots\}$，$2\times 15^x\neq 0$，根據「定理 2(iii)」，可知上述兩個解是線性獨立的。

接下來介紹如何找出常係數齊次方程的線性獨立解。在 (2) 中，T 看似一個以算子 ϕ 為變項的多項式。事實上，如果把 ϕ 當作普通變項處理，即把它換成普通變項 t，可得以下 n 次多項式方程，稱為 (2) 的輔助方程(auxiliary equation)[3]：

$$k_nt^n+\ldots+k_1t+k_0=0 \qquad (6)$$

[2]在進行以下計算時，要應用以下三角恆等式：$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ 以及 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$。

[3]很多教科書都把本文所指的「輔助方程」稱為「特徵方程」(characteristic equation)，但由於「特徵方程」也用來指稱用以計算矩陣特徵值的方程 (參見《數學示例：特徵值與譜》)，為免產生混淆，本文不用「特徵方程」此一名稱。

根據「代數基本定理」，上述 n 次多項式可以因式分解為 1 次多項式的乘積，因此 (6) 可以改寫為：

$$k_n(t-t_1)^{s_1}\times\ldots\times(t-t_k)^{s_k}=0 \qquad (7)$$

其中 $s_1+\ldots+s_k=n$。從上式可知，任何一個 $(t-t_i)^{s_i}=0$ $(1\leq i\leq k)$ 的解都是 (7) 的解，由此可得 (6) 的解 (又稱「根」)：t_1、...、t_k (每個 t_i 是 s_i 重根)。

把以上結果類推到常係數齊次方程 (2)，(2) 也可以改寫為：

$$k_n(\phi-t_1I)^{s_1}\circ\ldots\circ(\phi-t_kI)^{s_k}f(x)=0 \qquad (8)$$

由於上式中的各個 t_i 都是常數，可以證明這些 $(\phi-t_iI)^{s_i}$ 可調換次序[4]，這樣我們可以把任何一個 $(\phi-t_iI)^{s_i}$ 調到上式中緊貼 $f(x)$ 之前的位置，即把上式改寫成：

$$k_n(\phi-t_1I)^{s_1}\circ\ldots\circ(\phi-t_{i-1}I)^{s_{i-1}}\circ(\phi-t_{i+1}I)^{s_{i+1}}\circ\ldots\circ(\phi-t_kI)^{s_k}\circ(\phi-t_iI)^{s_i}f(x)=0 \qquad (9)$$

接著求解

$$(\phi-t_iI)^{s_i}f(x)=0 \qquad (10)$$

設求得某個 $f_1(x)$ 滿足上式，把這個 $f_1(x)$ 代入 (9)，可得到

$$\begin{aligned}
& k_n(\phi-t_1I)^{s_1}\circ\ldots\circ(\phi-t_{i-1}I)^{s_{i-1}}\circ(\phi-t_{i+1}I)^{s_{i+1}}\circ\ldots\circ(\phi-t_kI)^{s_k}\\
& \circ(\phi-t_iI)^{s_i}f_1(x)\\
= \; & k_n(\phi-t_1I)^{s_1}\circ\ldots\circ(\phi-t_{i-1}I)^{s_{i-1}}\circ(\phi-t_{i+1}I)^{s_{i+1}}\circ\ldots\circ(\phi-t_kI)^{s_k}(0)\\
= \; & 0
\end{aligned}$$

這即是說任何一個 $(\phi-t_iI)^{s_i}f(x)$ 的解都是 (2) 的解。由此可知，為求 (2) 的解，只需就各個 t_i 求解 (10)，以下讓我們看看在不同情況下這些解的形式。

[4]若有某個 t_i 不是常數，便不可隨意調換次序。例如讀者可自行驗證

$$(D-xI)(D-I)f(x)=D^2f(x)-Df(x)-xDf(x)+xf(x)$$

而

$$(D-I)(D-xI)f(x)=D^2f(x)-Df(x)-f(x)-xDf(x)+xf(x)$$

同樣，讀者可自行驗證

$$(E-xI)(E-I)f(x)=f(x+2)-f(x+1)-xf(x+1)+xf(x)$$

而

$$(E-I)(E-xI)f(x)=f(x+2)-2f(x+1)-xf(x+1)+xf(x)$$

由此可見，$(D-xI)(D-I)\neq(D-I)(D-xI)$ 並且 $(E-xI)(E-I)\neq(E-I)(E-xI)$。

最基本的情況是各個 $s_i = 1$，即 (7) 包含 n 個相異的一重根。在此情況下，若 $\phi = D$，則 $e^{t_i x}$ 是 $(D - t_i I)f(x)$ 的解；若 $\phi = E$，則 ${t_i}^x$ 是 $(E - t_i I)f(x)$ 的解 (請讀者自行驗證這一點)，因此 (2) 有 n 個解，而且可以證明 (例如用朗斯基行列式和卡索拉蒂行列式)，這些解是線性獨立的，因此若 (2) 是微分方程，

$$\{e^{t_1 x}, \ldots, e^{t_n x}\} \qquad (11)$$

構成其基本解集，而 (2) 的通解具有以下形式：

$$f(x) = c_1 e^{t_1 x} + \ldots + c_n e^{t_n x} \qquad (12)$$

若 (2) 是差分方程，則

$$\{{t_1}^x, \ldots, {t_n}^x\} \qquad (13)$$

構成其基本解集，而 (2) 的通解具有以下形式：

$$f(x) = c_1 {t_1}^x + \ldots + c_n {t_n}^x \qquad (14)$$

舉例說，考慮以下 4 階微分方程：

$$D^4 f(x) + 5D^3 f(x) - 17D^2 f(x) - 21Df(x) = 0 \qquad (15)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^4 + 5t^3 - 17t^2 - 21t &= 0 \\ t(t+7)(t+1)(t-3) &= 0 \qquad (16) \end{aligned}$$

由於上式包含四個一重根：0、-7、-1 和 3，根據 (11) 和 (12)，可知

$$\{1, e^{-7x}, e^{-x}, e^{3x}\} \qquad (17)$$

構成 (15) 的基本解集，而 (15) 的通解是

$$f(x) = c_1 + c_2 e^{-7x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{3x} \qquad (18)$$

接著考慮以下 2 階差分方程 (以下方程的最高階與最低階移位算子的階之差是 $1 - (-1) = 2$，所以以下方程的階是 2)：

$$Ef(x) + f(x) - 2E^{-1} f(x) = 0 \qquad (19)$$

為使上述方程符合 (1) 的形式和方便求解，首先把它改寫成以 E^2 作為最高階移位算子的形式，其方法是代入 $x - 1 = y$，然後又代入 $y = x$ (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (6))：

$$E^2 f(x) + Ef(x) - 2f(x) = 0 \qquad (20)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^2+t-2 &= 0 \\ (t+2)(t-1) &= 0 \qquad (21) \end{aligned}$$

由於上式包含兩個一重根：-2 和 1，根據 (13) 和 (14)，可知

$$\{(-2)^x, 1\} \qquad (22)$$

構成 (20) 的基本解集，而 (20) 的通解是

$$f(x) = c_1(-2)^x + c_2 \qquad (23)$$

讀者請自行驗證，上式既是 (20) 的解，也是 (19) 的解 (由此可證 (19) 與 (20) 是等價形式)。

(11) – (14) 原則上也適用於 (6) 的某些根互為共軛複數的情況[5]，設 (6) 有一對互為共軛複數的根，這對根可寫成 $a \pm bi$ 的形式，也可寫成 $r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ 的形式 (其中 $r = |a+bi|$，$\theta = \mathrm{Arg}(a+bi)$[6])，那麼當 (2) 是微分方程時，這對根為我們提供一對解如下：$e^{ax}(\cos(bx) \pm i\sin(bx))$；而當 (8) 是差分方程時，這對根為我們提供一對解如下：$r^x(\cos(\theta x) \pm i\sin(\theta x))$。可是，以上這兩對解都包含虛數單位 i，我們要設法去掉它。如前所述，(2) 的解構成一個解空間，這個解空間不僅是 $\mathbb{R}$ 上的向量空間，其實也是 $\mathbb{C}$ 上的向量空間。因此我們可以透過對上述的解進行適當的線性組合，以得到不含 i 的解，例如

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + \frac{1}{2}e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \\ = \;& e^{ax}\cos(bx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2}e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + \frac{i}{2}e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \\ = \;& e^{ax}\sin(bx) \end{aligned}$$

由此可知，當 (2) 是微分方程時，$e^{ax}\cos(bx)$ 和 $e^{ax}\sin(bx)$ 是不含 i 的解，而且可以證明這對解是線性獨立的。類似地，由於

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}r^x(\cos(\theta x) + i\sin(\theta x)) + \frac{1}{2}r^x(\cos(\theta x) - i\sin(\theta x)) \\ = \;& r^x\cos(\theta x) \end{aligned}$$

[5]根據「方程式論」，若某多項式方程的係數全為實數，而該方程有複數根，則其複數根的數目必為偶數，而且兩兩互為共軛複數。

[6]請參閱《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中有關複數的介紹。

$$
\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} r^x(\cos(\theta x) + i\sin(\theta x)) + \frac{i}{2} r^x(\cos(\theta x) - i\sin(\theta x)) \\
= \ & r^x \sin(\theta x)
\end{aligned}
$$

可知當 (2) 是差分方程時，$r^x \cos(\theta x)$ 和 $r^x \sin(\theta x)$ 是不含 i 的解，而且可以證明這對解也是線性獨立的。總括而言，當 (2) 的輔助方程包含互為共軛複數的根時，我們只需把上述包含圓函數的解取代 (11) – (14) 中包含共軛複數的解。

舉例說，考慮以下 3 階差分方程：

$$2E^3 f(x) + E^2 f(x) + 8Ef(x) + 4f(x) = 0 \qquad (24)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$
\begin{aligned}
2t^3 + t^2 + 8t + 4 &= 0 \\
2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 2i)(t + 2i) &= 0 \qquad (25)
\end{aligned}
$$

上式包含一個一重實數根 $-\frac{1}{2}$ 和一對互為共軛複數的根 $\pm 2i$。由於 $\pm 2i$ 可以寫成 $2(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2})$ 的形式，根據前面的討論，可知

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^x, 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), 2^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right\} \qquad (26)$$

構成 (24) 的基本解集，而 (24) 的通解是

$$f(x) = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^x + c_2 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3 2^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (27)$$

如在 (7) 中有某個 $s_i > 1$，那麼 t_i 是 (7) 的 s_i 重根。在此情況下，只能得到一個解 (即 $e^{t_i x}$ 或 ${t_i}^x$)，或者一對解 (即 $e^{ax}\cos(bx)$ 和 $e^{ax}\sin(bx)$，或 $r^x\cos(\theta x)$ 和 $r^x\sin(\theta x)$)。為了得到其他解，可以用 x、x^2、...、x^{s_i-1} 分別乘以上述的一個或一對解。這樣做的結果是在上述的一個或一對解以外得到 $s_i - 1$ 個函數或者 $s_i - 1$ 對函數，可以證明這些函數連同原有的一個或一對解都是 (2) 的解，而且都是線性獨立的。

舉例說，考慮以下 6 階微分方程：

$$D^6 f(x) + 27D^4 f(x) + 243D^2 f(x) + 729 f(x) = 0 \qquad (28)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$
\begin{aligned}
t^6 + 27t^4 + 243t^2 + 729 &= 0 \\
(t - 3i)^3(t + 3i)^3 &= 0 \qquad (29)
\end{aligned}
$$

上式包含兩個三重根：$3i$ 和 $-3i$，由於它們互為共軛複數，可知 $\cos(3x)$ 和 $\sin(3x)$ 是 (28) 的一對解。根據前面的討論，為得到其餘兩對解，我們把 x 和 x^2 分別乘以 $\cos(3x)$ 和 $\sin(3x)$，由此可知

$$\{\cos(3x), \sin(3x), x\cos(3x), x\sin(3x), x^2\cos(3x), x^2\sin(3x)\} \qquad (30)$$

構成 (28) 的基本解集，而 (28) 的通解是

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + c_3x\cos(3x) + c_4x\sin(3x) \\ &\quad + c_5x^2\cos(3x) + c_6x^2\sin(3x) \qquad (31) \end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁