感受伽羅瓦：環的同態與同構

在前面各章，我們介紹了多種數學對象 (包括各種數系、多項式、矩陣、四元數以至陪集) 上的加法和乘法運算。這些數學對象雖然各有不同，但某些數學對象之間在加法和乘法上存在有趣的對應關係，以下首先從一個例子說起。一方面，根據簡單的算術知識，我們知道偶數和奇數的加法和乘法結果服從某些規律，例如偶數 + 偶數 = 偶數，奇數 × 偶數 = 偶數等，據此可以把這些規律總結成以下「加法表」和「乘法表」：

+	偶數	奇數
偶數	偶數	奇數
奇數	奇數	偶數

×	偶數	奇數
偶數	偶數	偶數
奇數	偶數	奇數

請注意以上兩表不應被看成通常的「加法表」和「乘法表」(例如中國傳統的「九因歌」)，這是因為「偶數」和「奇數」不是單個數字，而是由無窮多個數字組成的集合，而通常的加法和乘法只適用於單個的數字而非數字集合。因此以上兩表應被看成偶數和奇數的加法和乘法規律的總結，並以「加法表」和「乘法表」的形式表達出來的結果。

另一方面，根據我們在《感受伽羅瓦：因子分解》中介紹的 $\mathbb{Z}_2\,(=\{0,1\})$ 中的運算 (也就是模 2 同餘下的運算)，我們知道 0 和 1 的加法和乘法結果可以表述為以下「加法表」和「乘法表」(下表中的 + 號和 × 號帶有下標 2 以凸顯這是模 2 同餘下的加法和乘法運算)：

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

細心比較以上兩組「加法表」和「乘法表」，可以看到這兩個表中的實體雖然各不相同，但在結構上卻是一模一樣的。只要為第一組表中的 + 號和 × 號加上下標 2，並且把「偶數」和「奇數」分別換成 0 和 1，便可得到第二組表。

為了精確表述上述兩組數學對象在加法和乘法運算上的相同結構，我們引

入同態(homomorphism) 的概念。設有兩個交換環[1]$(R,+,\times)$ 和 $(S,+',\times')$，一個從 $(R,+,\times)$ 到 $(S,+',\times')$ 的同態就是一個從 R 到 S 的函數 $\phi: R\to S$，使得對任何 $x,y\in R$，均有

$$\begin{aligned}\phi(x+y) &= \phi(x)+'\phi(y) \qquad (1)\\ \phi(x\times y) &= \phi(x)\times'\phi(y) \qquad (2)\end{aligned}$$

上述定義的直觀意義是，函數 ϕ 建立了 R 與 S 元素之間的對應關係，而且這種對應關係保存了加法和乘法的運算結果。

回顧前述例子，現在我們可以說該例子體現了從 $(\mathbb{Z},+,\times)$ 到 $(\mathbb{Z}_2,+_2,\times_2)$ 的一個同態，這個同態可以表述為以下函數 $\phi_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$：

$$\phi_1(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 是偶數}\\ 1, & \text{若 } n \text{ 是奇數}\end{cases} \qquad (3)$$

上述函數建立了 $\mathbb{Z}$ 與 $\mathbb{Z}_2$ 元素之間的對應關係，即所有偶數對應 0 並且所有奇數對應 1。接下來驗證上述對應關係保存了加法和乘法的運算結果，即驗證 (1) 和 (2)。例如設 x 和 y 都是偶數，一方面，由於偶數 + 偶數 = 偶數，我們有 $\phi_1(x+y)=0$；另一方面，亦有 $\phi_1(x)+_2\phi_1(y)=0+_2 0=0$，由此驗證了 $\phi_1(x+y)=\phi_1(x)+_2\phi_1(y)$ 的一個情況。另外又如設 x 和 y 分別為奇數和偶數，一方面，由於奇數 × 偶數 = 偶數，我們有 $\phi_1(x\times y)=0$；另一方面，亦有 $\phi_1(x)\times_2\phi_1(y)=1\times_2 0=0$，由此亦驗證了 $\phi_1(x\times y)=\phi_1(x)\times_2\phi_1(y)$ 的一個情況。讀者可自行驗證其他情況。

接下來定義與同態有關的兩個重要集合。設 $\phi: R\to S$ 為從交換環 R 到交換環 S 的同態 (也就是兩個交換環之間的對應關係)，那麼 ϕ 的核(kernel)，記作 $\mathrm{Ker}(\phi)$，包含 R 中所有與 S 中的 0 對應的元素，即

$$\mathrm{Ker}(\phi)=\{r\in R:\phi(r)=0\}$$

ϕ 的像(image)，記作 $\mathrm{Im}(\phi)$，則包含 S 中與 R 中至少一個元素對應的元素，即

$$\mathrm{Im}(\phi)=\{s\in S: \text{存在 } r\in R \text{ 使得} \phi(r)=s\}$$

以前述的 ϕ_1 為例，根據 (3)，可見 ϕ_1 把所有偶數而且只把偶數映射為 0，由此可得 $\mathrm{Ker}(\phi_1)=2\mathbb{Z}$，即由所有偶數組成的集合。另外，由於 $\mathbb{Z}_2$ 中的每個元素都與 $\mathbb{Z}$ 中至少一個元素對應 (0 與任何偶數對應，1 與任何奇數對應)，由此可得 $\mathrm{Im}(\phi_1)=\mathbb{Z}_2$ (換句話說，ϕ_1 是「到上」函數，儘管不是「一一」函數)。

接下來介紹一個與同態、核和像有關的定理，但在介紹該定理前，須先

[1]本章沿襲上一章的做法，把討論範圍限於交換環，儘管很多概念也適用於非交換環。

對某些符號作出一些約定。設 r 為某環中的元素，n 為正整數，我們借用中學時代學過的表示法，用 nr 代表把 n 個 r 相加的結果，r^n 代表把 n 個 r 相乘的結果，$-nr$ 既可理解為 nr 的加法逆元，也可理解為把 n 個 $-r$ (即 r 的加法逆元) 相加的結果，例如 $2r = r + r$，$r^2 = r \times r$，$-2r$ 既可理解為 $-(r + r)$，也可理解為 $(-r) + (-r)$。現在引入以下定理。

定理 1：設 $\phi : R \to S$ 為從交換環 R 到交換環 S 的同態，r 為 R 中的元素，n 為正整數，則

(i) $\phi(0) = 0$

(ii) $\phi(nr) = n\phi(r)$

(iii) $\phi(-nr) = -n\phi(r)$

(iv) $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$

(v) $\mathrm{Ker}(\phi)$ 是 R 的理想

(vi) $\mathrm{Im}(\phi)$ 是 S 的子環

以前述的 ϕ_1 為例，由於 0 是偶數，故有 $\phi_1(0) = 0$，由此驗證了上述定理中的 (i)。為驗證 (ii) ─ (iv)，設 $r = 5$ 和 $n = 3$。首先，有 $\phi_1(3 \times 5) = 1 = 3 \times \phi_1(5)$，因為 $\phi_1(5) = 1$，而在 $\mathbb{Z}_2$ 下，3 個 1 相加的結果也是 1。其次，有 $\phi_1(-3 \times 5) = 1 = -3 \times \phi_1(5)$，因為 $-3 \times \phi_1(5)$ 可以看成 $3 \times \phi_1(5)$ 的加法逆元，而在 $\mathbb{Z}_2$ 下，1 的加法逆元就是 1。再其次，有 $\phi_1(5^3) = 1 = (\phi_1(5))^3$，因為在 $\mathbb{Z}_2$ 下，3 個 1 相乘的結果也是 1。另外，根據前面的討論，我們知道 $\mathrm{Ker}(\phi_1) = 2\mathbb{Z}$ 和 $\mathrm{Im}(\phi_1) = \mathbb{Z}_2$。容易看到，$2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子環，並且是「乘法黑洞」(因為任何整數乘以偶數都是偶數)，因此 $2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的理想，由此驗證了 (v)。最後，$\mathbb{Z}_2$ 當然是 $\mathbb{Z}_2$ 的子環 (任何環都是自身的子環)，由此驗證了 (vi)。

在上述有關同態的定義中，對函數 ϕ 沒有特別規定，但如果 ϕ 是一一到上函數，便得到同態的一個子類，稱為同構(isomorphism)。抽象代數學使用專門的符號表示同構，即若環 R 與環 S 同構，則記作 $R \cong S$。直觀地看，如果 ϕ 是 R 與 S 之間的同構，那麼 ϕ 不僅保存了 R 和 S 上的加法和乘法運算結果，而且建立了 R 和 S 元素之間的一一對應關係。

舉例說，複數集合 $\mathbb{C}$ 與具有以下形式的 2×2 方陣集合存在一一對應關係 (在下式中，$a, b \in \mathbb{R}$)：

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

如果用 M 代表由以上方陣組成的集合，那麼可以寫出以下函數 $\phi_2 : \mathbb{C} \to M$：

$$\phi_2(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

不難證明 ϕ_2 是一一到上函數，而且滿足上述的 (1) 和 (2)。特別地，雖然一般矩陣的乘法不具有交換性，但 M 中矩陣的乘法卻具有交換性 (讀者可自行證明這一點)，因而可以與複數一樣滿足相同的乘法法則。此外，在 $\mathbb{C}$ 中，我們有

$$i \times i = -1$$

而在 M 中，相對應的事實則是

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

總括以上結果，我們有 $\mathbb{C} \cong M$，因此直觀地說，儘管 $\mathbb{C}$ 和 M 這兩個環由具有不同形式的數學對象組成，但這兩個環有相同的代數結構，而且其元素互相一一對應。

以下是有關同態和同構的一個重要定理。

定理 2 (第一環同構定理First Isomorphism Theorem for Rings)：設 $\phi : R \to S$ 為交換環上的同態，那麼 $R/\mathrm{Ker}(\phi) \cong \mathrm{Im}(\phi)$，以下的 θ 就是 $R/\mathrm{Ker}(\phi)$ 與 $\mathrm{Im}(\phi)$ 之間的同構函數 (在以下定理中，$r \in R$)：

$$\theta(r + \mathrm{Ker}(\phi)) = \phi(r) \qquad (4)$$

上述定理綜合運用《感受伽羅瓦：子環與商環》和本章的一些定理。由於 ϕ 是從 R 到 S 的同態，根據本章的「定理 1(v)」，可知 $\mathrm{Ker}(\phi)$ 是 R 的理想，因此根據《感受伽羅瓦：子環與商環》中的「定理 1」，可知 $R/\mathrm{Ker}(\phi)$ 構成一個環 (即商環)，這個環的元素包括所有形如 $r + \mathrm{Ker}(\phi)$ 的陪集 (其中 $r \in R$)。此外，根據本章的「定理 1(vi)」，$\mathrm{Im}(\phi)$ 是 S 的子環。上述定理的要旨是，$R/\mathrm{Ker}(\phi)$ 與 $\mathrm{Im}(\phi)$ 同構，(4) 提供了 $R/\mathrm{Ker}(\phi)$ 與 $\mathrm{Im}(\phi)$ 之間的同構函數。

為讓讀者明白上述定理，我們回顧前述的 $\phi_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$。根據前面的討論，可知 $\mathrm{Ker}(\phi_1) = 2\mathbb{Z}$ 和 $\mathrm{Im}(\phi_1) = \mathbb{Z}_2$。如前所述，$2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的理想，因此 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 構成一個環[2]，這個環由兩個陪集組成：$2\mathbb{Z}\,(= 0 + 2\mathbb{Z})$ 和 $1 + 2\mathbb{Z}$，分別為所有偶數組成的集合和所有奇數組成的集合，即

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$$

[2] 更準確地說，$2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的極大理想，因此 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 構成一個域。

根據上述定理，我們有以下同構關係：

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \qquad (5)$$

其中的同構函數可根據 (4) 寫成

$$\theta_1(r+2\mathbb{Z}) = \phi_1(r), \text{ 其中} r = 0 \text{或} 1$$

利用 ϕ_1 的定義 (3)，可以把上式更具體地寫成

$$\theta_1(2\mathbb{Z}) = 0, \theta_1(1+2\mathbb{Z}) = 1$$

上式提供了 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 與 $\mathbb{Z}_2$ 元素之間的一一對應關係，即 $2\mathbb{Z}$ 對應著 0，$1+2\mathbb{Z}$ 則對應著 1。有了上述一一對應關係，我們便可以把上面第一組「加法表」和「乘法表」重新理解為域 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的「加法表」和「乘法表」，其中的「偶數」和「奇數」可分別看成 $2\mathbb{Z}$ 和 $1+2\mathbb{Z}$ 的別稱，而上述兩組「加法表」和「乘法表」的相似性便可理解為 (5) 所列「同構」關係的體現。

「定理 2」可用來驗證某些商環的代數結構。我們在《感受伽羅瓦：質理想與極大理想》中曾討論以下商環：

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle = \{\langle x\rangle, 1+\langle x\rangle, -1+\langle x\rangle, 2+\langle x\rangle, -2+\langle x\rangle, \cdots\} \qquad (6)$$

根據上述網頁的「定理 1」，上述商環是一個整環，現在讓我們驗證這一點。為此，首先定義以下函數 $\phi_3 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ (在下式中，f 是整係數多項式)：

$$\phi_3(f) = f(0)$$

接著要求 $\mathrm{Ker}(\phi_3)$ 和 $\mathrm{Im}(\phi_3)$。對於任意整係數多項式 f 而言，$f(0)$ 等於該多項式的常數項，例如若 $f = 37x^{20} + 13x^7 - 111$，那麼 $f(0) = -111$，由此容易看到 $\mathrm{Ker}(\phi_3)$ 的成員就是常數項等於 0 的整係數多項式 (因為把這樣的函數代入 ϕ_3 中所得結果等於 0)。我們在《感受伽羅瓦：質理想與極大理想》中也曾指出 $\langle x\rangle$ 就是所有常數項等於 0 的整係數多項式組成的集合，由此有 $\mathrm{Ker}(\phi_3) = \langle x\rangle$。另一方面，由於任何整數都可作為一個整係數多項式的常數項，由此亦有 $\mathrm{Im}(\phi_3) = \mathbb{Z}$。

把以上有關 ϕ_3 的結果代入「定理 2」，便可得到以下同構關係：

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle \cong \mathbb{Z} \qquad (7)$$

其中的同構函數可根據 (4) 寫成

$$\theta_3(f+\langle x\rangle) = f(0)$$

上式提供了 $\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle$ 與 $\mathbb{Z}$ 元素之間的一一對應關係，例如 $-2+\langle x\rangle$ 對應著 -2 (這是因為當 f 是常數多項式 -2 時，不論 x 是甚麼，都有 $f(x)=-2$，故必有 $f(0)=-2$)。由於我們有 (7) 這個同構關係，並且 $\mathbb{Z}$ 是整環，故知 $\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle$ 也是一個整環。

我們在《感受伽羅瓦：質理想與極大理想》中也曾討論以下商環：

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle=\{ax+b+\langle x^2+1\rangle : a,b\in\mathbb{R}\} \qquad (8)$$

根據上述網頁的「定理 2」，上述商環是一個域，現在讓我們驗證這一點。為此，首先定義以下函數 $\phi_4:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{C}$ (在下式中，f 是實係數多項式)：

$$\phi_4(f)=f(i)$$

接著要求 $\mathrm{Ker}(\phi_4)$ 和 $\mathrm{Im}(\phi_4)$。由於 $i^2=-1$，我們知道 i 是多項式 x^2+1 的根，同時也是任何包含 x^2+1 作為因式的多項式的根，例如 i 是 $(x^2+1)(\sqrt{5}x^{77}-\frac{23}{47})$ 的根 (因為把 i 代入上述多項式的變項 x，可得結果 0)。反過來看，如果某多項式不包含 x^2+1 作為因式，則 i 必不是該多項式的根。根據前面各章對主理想概念的討論，包含 x^2+1 作為因式的多項式方程的集合可以記作 $\langle x^2+1\rangle$。換句話說，當且僅當 $f\in\langle x^2+1\rangle$，$f(i)=0$，由此有 $\mathrm{Ker}(\phi_4)=\langle x^2+1\rangle$。

另一方面，任何複數 $a+bi$ (其中 $a,b\in\mathbb{R}$) 都有一個實係數多項式 f 使得 $f(i)=a+bi$，這個實係數多項式就是 $bx+a$ (設 $f=bx+a$，那麼 $f(i)=a+bi$)，由此有 $\mathrm{Im}(\phi_4)=\mathbb{C}$。

把以上有關 ϕ_4 的結果代入「定理 2」，便可得到以下同構關係：

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle\cong\mathbb{C} \qquad (9)$$

其中的同構函數可根據 (4) 寫成

$$\theta_4(f+\langle x^2+1\rangle)=f(i) \qquad (10)$$

上式提供了 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 與 $\mathbb{C}$ 元素之間的一一對應關係，例如 $x+1+\langle x^2+1\rangle$ 對應著 $1+i$ (這是因為若 $f=x+1$，則 $f(i)=1+i$)。由於我們有 (9) 這個同構關係，並且 $\mathbb{C}$ 是域，故知 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 也是一個域。

由於 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 是域，它的每個非零成員都應有乘法逆元，我們在《感受伽羅瓦：質理想與極大理想》中介紹了一種求這些乘法逆元的方法，這種方法要解聯立方程。現在由於有同構關係 (9)，我們可以借助 $\mathbb{C}$ 中元素的乘法逆元以及同構函數 (10) 來求 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 中元素的乘法逆元。

以 $x+1+\langle x^2+1\rangle$ 為例，前面說過這個元素對應著複數 $1+i$。利用複數中的除法運算 (見《感受伽羅瓦：二次方程與複數》)，可以求得這個複數的乘法逆元是 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$。根據同構函數 (10)，容易看到 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ 對應著 $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\langle x^2+1\rangle$，這就是 $x+1+\langle x^2+1\rangle$ 的乘法逆元，請注意此一結果與上一章的計算結果完全吻合。

根據 (10)，陪集 $x+\langle x^2+1\rangle$ 對應著虛數單位 i (因為如果 $f=x$，那麼 $f(i)=i$)，這可以從兩個角度去理解。首先，由於 i 滿足 $i^2+1=0$，我們預期 $x+\langle x^2+1\rangle$ 也應滿足 $(x+\langle x^2+1\rangle)^2+(1+\langle x^2+1\rangle)=\langle x^2+1\rangle$，以下讓我們用商環上加法和乘法的定義來驗證此一結果：

$$\begin{aligned}
& (x+\langle x^2+1\rangle)^2+(1+\langle x^2+1\rangle) \\
= \ & x^2+1+\langle x^2+1\rangle \\
= \ & \langle x^2+1\rangle
\end{aligned}$$

上面最後一行的理據是，把 x^2+1 除以 x^2+1，所得餘式是 0。

其次，根據 (8)，$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 包含著所有形如 $ax+b+\langle x^2+1\rangle$ 的陪集，根據 $x+\langle x^2+1\rangle$ 與 i 的對應關係，這些陪集的全體對應著全體 $ai+b$，即全體複數，這從另一角度說明了 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 與 $\mathbb{C}$ 的對應關係。

在以上的推導中，我們用 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 來構造 $\mathbb{C}$[3]，其中二次多項式 x^2+1 用來引出 i (因為 i 是二次多項式 x^2+1 的根)，而 i 則用來引出所有複數 (通過 $a+bi$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$)。可是，能引出所有複數的數不只 i 一個，例如 $\sqrt{5}i$ 也能引出所有複數，而這個數是二次多項式 x^2+5 的根 (因為 $(\sqrt{5}i)^2=-5$；另請注意這個多項式在 $\mathbb{R}[x]$ 下不可約)，以下讓我們證明 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle$ 同構於 $\mathbb{C}$。為此，首先定義以下函數 $\phi_5:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{C}$ (在下式中，f 是實係數多項式)：

$$\phi_5(f)=f(\sqrt{5}i)$$

接著要求 $\mathrm{Ker}(\phi_5)$ 和 $\mathrm{Im}(\phi_5)$。由於 $\sqrt{5}i$ 是多項式 x^2+5 的根，同時也是任何包含 x^2+5 作為因式的多項式的根。反過來看，如果某多項式不包含 x^2+5 作為因式，則 $\sqrt{5}i$ 必不是該多項式的根。由此有 $\mathrm{Ker}(\phi_5)=\langle x^2+5\rangle$。

另一方面，任何複數 $a+bi$ (其中 $a,b\in\mathbb{R}$) 都有一個實係數多項式 f 使得 $f(\sqrt{5}i)=a+bi$，這個實係數多項式就是 $\frac{b}{\sqrt{5}}x+a$ (設 $f=\frac{b}{\sqrt{5}}x+a$，那麼 $f(\sqrt{5}i)=a+bi$)，由此有 $\mathrm{Im}(\phi_5)=\mathbb{C}$。

[3] 嚴格地說，應是「與 $\mathbb{C}$ 同構的代數結構」，但在抽象代數學上，有時可以把互相同構的代數結構視為等同，所以可以把 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 視作等同 $\mathbb{C}$。

把以上有關 ϕ_5 的結果代入「定理 2」，便可得到以下同構關係：

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle \cong \mathbb{C}$$

其中的同構函數可根據 (4) 寫成

$$\theta_5(f+\langle x^2+5\rangle) = f(\sqrt{5}i)$$

上式提供了 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle$ 與 $\mathbb{C}$ 元素之間的一一對應關係，例如 $x+\langle x^2+5\rangle$ 對應著 $\sqrt{5}i$ (這是因為若 $f=x$，則 $f(\sqrt{5}i)=\sqrt{5}i$)。跟前述情況相似，正如 $\sqrt{5}i$ 滿足 $(\sqrt{5}i)^2+5=0$，容易驗證 $x+\langle x^2+5\rangle$ 也滿足 $(x+\langle x^2+5\rangle)^2+(5+\langle x^2+5\rangle)=\langle x^2+5\rangle$。

應如何理解 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle$？類似前面的 (8)，我們可以寫出 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle$ 的元素如下：

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle = \{ax+b+\langle x^2+5\rangle : a,b\in\mathbb{R}\}$$

上式顯示 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+5\rangle$ 包含著所有形如 $ax+b+\langle x^2+5\rangle$ 的陪集，由於如前所述，$x+\langle x^2+5\rangle$ 對應著 $\sqrt{5}i$，現在我們不妨創作一個新符號 ι[4]，用來代表 x^2+5 的根 (亦即 $\sqrt{5}i$)，這樣我們便可以把所有複數表示為 $a\iota+b$。在這個新表示法下，複數也是二維實數，每個複數均可由兩個實數 a 和 b 加上一個 ι 表示；這些複數也能進行四則運算，並且滿足 $\iota^2+5=0$。請注意我們平時用 $ai+b$ 表示的複數，在新表示法下是 $\frac{a}{\sqrt{5}}\iota+b$ (這是因為 $\iota=\sqrt{5}i$，故有 $\frac{a}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}i)+b=ai+b$)。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[4]請注意虛數單位 i 本質上也是由數學家創作出來的，既然數學家可以創作 i，我們也不妨創作其他新符號。