感受伽羅瓦：三次方程的根式解

本網頁介紹求實係數三次多項式方程根式解的一般方法，設 a、b、c、d 為實數，其中 $a \neq 0$，則三次方程的一般形式為

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

我們在《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中曾介紹求解二次方程的契爾恩豪斯變換方法，這種方法先把全式除以 a，然後用 $x = y - \frac{b}{2a}$ 代入原有二次方程，從而使該方程的二次項係數 a 和一次項係數 b 分別變為 1 和 0，以易於求解。對於三次方程，我們也採用類似方法，先把全式除以 a，然後用 $x = y - \frac{b}{3a}$ 代入：

$$\begin{aligned}
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= 0 \\
\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} &= 0 \\
y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right) &= 0
\end{aligned}$$

現在如果設 $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ 和 $q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$，那麼 (1) 便變成：

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

上式就是經化簡的三次方程，其三次項和二次項係數分別為 1 和 0。這裡我們假設 $p \neq 0$ 和 $q \neq 0$，這是因為若 $p = 0$，那麼 (2) 可以簡單求解如下 (在下式中，ω_3 代表 1 的主幅角為 $\frac{2\pi}{3}$ 的立方根，即 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$)：

$$\begin{aligned}
y^3 + q &= 0 \\
y &= \sqrt[3]{-q},\ \omega_3(\sqrt[3]{-q}),\ {\omega_3}^2(\sqrt[3]{-q})
\end{aligned}$$

若 $q = 0$，那麼 (2) 也可以簡單求解如下：

$$\begin{aligned}
y^3 + py &= 0 \\
y(y^2 + p) &= 0 \\
y &= 0,\ \sqrt{-p},\ -\sqrt{-p}
\end{aligned}$$

當 $p\neq 0$ 和 $q\neq 0$ 時，(2) 似乎並不容易求解。不過，經過多代人的求解經驗，人們發現了一種求解 (2) 的方法，其關鍵是假設 (2) 的解具有以下形式：

$$y = z - \frac{p}{3z} \qquad (3)$$

把上式代入 (2)，

$$\begin{aligned}\left(z-\frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z-\frac{p}{3z}\right)+q &= 0\\ z^3+q-\frac{p^3}{27z^3} &= 0\\ z^6+qz^3-\frac{p^3}{27} &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

上式雖然看似六次方程，但如把 $u=z^3$ 代入上式，所得結果是以下二次方程：

$$u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0 \qquad (5)$$

上述方程稱為三次方程 (2) 的二次預解式(resolvent quadratic)[1]，接著可以運用二次方程的求解公式，求得上式的解如下：

$$\begin{aligned}u &= \frac{-q\pm\sqrt{q^2-(4)(1)\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2\times 1}\\ &= -\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \qquad (6)\end{aligned}$$

在上式中，$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 稱為三次方程的「判別式」，以下把此判別式記作 Δ_3。容易看到，當 Δ_3 取不同值時，上式表現為不同情況。以下暫時只討論 $\Delta_3\neq 0$ 的情況，在此情況下，上式包含兩個解，以下只討論 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 這個解 (記作 u_1)(讀者可自行驗證，如使用 (6) 中的另一個解，所得結果與以下分析的結果相同)。由於前面設定了 $u_1=z^3$，可知 z 等於 u_1 的立方根。根據我們在《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中的討論，u_1 的立方根共有三個，以下分別記作 z_1、z_2 和 z_3，並且有：

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\ z_2 &= \omega_3 z_1\\ &= \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\end{aligned}$$

[1]不同數學家會提出不同的二次預解式，本網頁介紹的只是其中一個。

$$
\begin{aligned}
z_3 &= {\omega_3}^2 z_1 \\
&= {\omega_3}^2 \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)
\end{aligned}
$$

接下來根據 (3) 去求 (2) 的三個解 (以下分別記作 y_1、y_2 和 y_3)，為求 y_1，須先計算 $-\frac{p}{3z_1}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
-\frac{p}{3z_1} &= -\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \\
&= \left(-\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \right) \\
&= -\frac{p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)}} \\
&= -\frac{p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)}{3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)}} \\
&= -\frac{p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)}{3\left(-\frac{p}{3} \right)} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}
\end{aligned}
$$

由此根據 (3)，可得

$$
\begin{aligned}
y_1 &= z_1 - \frac{p}{3z_1} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}
\end{aligned}
$$

請注意上式包含著 (6) 中兩個解的主立方根。

為計算 y_2 和 y_3，需要利用 z_1 與 z_2、z_3 的關係以及 $\frac{1}{\omega_3}$ 和 $\frac{1}{{\omega_3}^2}$，由於

ω_3 是 1 的立方根，故有 ${\omega_3}^3 = 1$，由此必有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_3} &= {\omega_3}^2 \\ \frac{1}{{\omega_3}^2} &= \omega_3 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} y_2 &= z_2 - \frac{p}{3z_2} \\ &= \omega_3 z_1 - \frac{p}{3\omega_3 z_1} \\ &= \omega_3 z_1 + \left(\frac{1}{\omega_3}\right)\left(-\frac{p}{3z_1}\right) \\ &= \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) + {\omega_3}^2\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) \\ y_3 &= z_3 - \frac{p}{3z_3} \\ &= {\omega_3}^2 z_1 - \frac{p}{3{\omega_3}^2 z_1} \\ &= {\omega_3}^2 z_1 + \left(\frac{1}{{\omega_3}^2}\right)\left(-\frac{p}{3z_1}\right) \\ &= {\omega_3}^2\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) + \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) \end{aligned}$$

以上求得的 y_1、y_2 和 y_3 只是以 y 作為變項的三次方程 (2) 的解，但由於前面曾設定 $x = y - \frac{b}{3a}$，故可馬上求得原來以 x 作為變項的三次方程 (1) 的三個解 (以下分別記作 x_1、x_2 和 x_3) 如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{b}{3a} \\ &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (7) \\ x_2 &= y_2 - \frac{b}{3a} \\ &= -\frac{b}{3a} + \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) + {\omega_3}^2\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right) \qquad (8) \\ x_3 &= y_3 - \frac{b}{3a} \end{aligned}$$

$$= -\frac{b}{3a} + {\omega_3}^2 \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) + \omega_3 \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \qquad (9)$$

當然我們還可以把 $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ 和 $q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$ 代入以上三式，從而得到以 a、b、c、d 這四個數表達的 (1) 的解，但這樣做不但令以上三式過於冗長，而且令人不易看到以上三式在結構上的整齊性。

上列公式是在假設 $\Delta_3 \neq 0$ 的情況下推導而來的，但 $\Delta_3 \neq 0$ 還可以細分為兩個子情況，以下讓我們看看在不同情況下，上列公式有何表現。首先考慮 $\Delta_3 > 0$ 的情況，在此情況下，$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ 是實數 (因為 a、b、c、d 全是實數，所以 p 和 q 也是實數)。由此可知，(7) 中的 x_1 必然是實數。至於 (8) 和 (9)，可以把 $\omega_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 ${\omega_3}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 代入，然後計算出：

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(-\frac{b}{3a} - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) i \\ x_3 &= \left(-\frac{b}{3a} - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) i \end{aligned}$$

上式顯示 x_2 和 x_3 是一對互相共軛的複數。從以上討論可見，當 $\Delta_3 > 0$ 時，(1) 有一個實數解和一對互為共軛複數的解。

其次考慮 $\Delta_3 < 0$ 的情況，在此情況下，(6) 變成

$$u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\, i \qquad (10)$$

上式包含兩個解，以下只討論 $-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\, i$ 這個解 (記作 u_1)(讀者可自行驗證，如使用另一個解，所得結果與以下分析的結果相同)。跟前面相同，接下來要求 u_1 這個複數的立方根，為此要先求 u_1 的模和主幅角，u_1 的模可計算如下：

$$|u_1| = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}
\end{aligned}
$$

請注意由於 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$，必有 $p < 0$，所以上述計算結果是實數。u_1 的主幅角則可計算如下：

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(u_1) &= \cos^{-1}\left(\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
u_1 = \sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}(\cos(\operatorname{Arg}(u_1)) + i\sin(\operatorname{Arg}(u_1)))
$$

由於 $\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}} = \sqrt{\frac{-p}{3}}$，根據《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中的「棣美弗定理」(即「定理 1」)，可求得 u_1 的三個立方根 (以下分別記作 z_1、z_2 和 z_3) 如下：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3}\right) \\
z_2 &= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)+2\pi}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)+2\pi}{3}\right) \\
z_3 &= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)+4\pi}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)+4\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

跟前面相同，接下來用 (3) 計算 y_1 如下：

$$
\begin{aligned}
y_1 &= z_1 - \frac{p}{3z_1} \\
&= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3}\right) - \frac{p}{3\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3}\right) - \frac{p}{3\sqrt{\frac{-p}{3}}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(u_1)}{3}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right) \\
&\quad + \left(\frac{-p}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{-p}}\left(\cos\left(-\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3} + i\sin\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right) + \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3} - i\sin\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right)
\end{aligned}
$$

在以上計算中，如把 $\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}$ 換成 $\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+2\pi}{3}$ 或 $\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+4\pi}{3}$，推導仍然成立，由此可得

$$
\begin{aligned}
y_2 &= z_2 - \frac{p}{3z_2} \\
&= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+2\pi}{3}\right) \\
y_3 &= z_3 - \frac{p}{3z_3} \\
&= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+4\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

利用 $x = y - \frac{b}{3a}$，可求得 (1) 的三個解 (以下分別記作 x_1、x_2 和 x_3) 如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)}{3}\right) \qquad (11) \\
x_2 &= -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+2\pi}{3}\right) \qquad (12) \\
x_3 &= -\frac{b}{3a} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}(u_1)+4\pi}{3}\right) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

以上三個解都是實數，由此可知，當 $\Delta_3 < 0$ 時，(1) 有三個相異的實數解。

最後考慮 $\Delta_3 = 0$ 的情況，在此情況下，(6) 變成

$$u = -\frac{q}{2} \qquad (14)$$

接著寫出 u 的三個立方根 (以下分別記作 z_1、z_2 和 z_3) 如下：

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \omega_3 z_1 \\
&= \omega_3 \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \right) \\
z_3 &= {\omega_3}^2 z_1 \\
&= {\omega_3}^2 \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

跟前面相同，接下來要用 (3) 計算 y_1。但在進行此計算前，可以先利用 $\Delta_3 = 0$ 作以下推導：

$$
\begin{aligned}
\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} &= 0 \\
-\frac{p^3}{27} &= \frac{q^2}{4} \\
-\frac{p}{3} &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
-\frac{p}{3z_1} &= \left(-\frac{p}{3}\right)\left(\frac{1}{z_1}\right) \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{q^2}{4}\right)\left(-\frac{2}{q}\right)} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}
\end{aligned}
$$

接著根據 (3)，有

$$
\begin{aligned}
y_1 &= z_1 - \frac{p}{3z_1} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\
&= -2\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

為計算 y_2 和 y_3，需要利用 z_1 與 z_2、z_3 的關係以及 $\frac{1}{\omega_3}$ 和 $\frac{1}{{\omega_3}^2}$，此外，還需要 $-\omega_3 - {\omega_3}^2$。根據《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中的「定理 2」，$1 + \omega_3 + {\omega_3}^2 = 0$，由此必有

$$
-\omega_3 - {\omega_3}^2 = 1
$$

因此

$$
\begin{aligned}
y_2 &= z_2 - \frac{p}{3z_2} \\
&= \omega_3 z_1 - \frac{p}{3\omega_3 z_1} \\
&= \omega_3 z_1 + \left(\frac{1}{\omega_3}\right)\left(-\frac{p}{3z_1}\right) \\
&= \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\right) + {\omega_3}^2\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\right) \\
&= \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)(-\omega_3 - {\omega_3}^2) \\
&= \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \\
y_3 &= z_3 - \frac{p}{3z_3} \\
&= {\omega_3}^2 z_1 - \frac{p}{3{\omega_3}^2 z_1} \\
&= {\omega_3}^2 z_1 + \left(\frac{1}{{\omega_3}^2}\right)\left(-\frac{p}{3z_1}\right) \\
&= {\omega_3}^2\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\right) + \omega_3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\right) \\
&= \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)(-{\omega_3}^2 - \omega_3) \\
&= \sqrt[3]{\frac{q}{2}}
\end{aligned}
$$

利用 $x = y - \frac{b}{3a}$，可求得 (1) 的三個解 (以下分別記作 x_1、x_2 和 x_3) 如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{b}{3a} - 2\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right) && (15) \\
x_2 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}} && (16) \\
x_3 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}} && (17)
\end{aligned}
$$

其中 x_2 和 x_3 相同，由此可知，當 $\Delta_3 = 0$ 時，(1) 有一對二重實數解和另一個實數解。

接下來讓我們運用上述方法求解以下三次方程：

$$6x^3 - 25x^2 - 31x + 140 = 0 \qquad (18)$$

由於在上述方程中，$a = 6$、$b = -25$、$c = -31$ 和 $d = 140$，故有

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{-31}{6} - \frac{(-25)^2}{3 \times 6^2} \\
&= -\frac{1183}{108} \\
q &= \frac{140}{6} - \frac{(-25) \times (-31)}{3 \times 6^2} + \frac{2 \times (-25)^3}{27 \times 6^3} \\
&= \frac{15745}{1458} \\
\Delta_3 &= \frac{\left(\frac{15745}{1458}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1183}{108}\right)^3}{27} \\
&= -19.52167
\end{aligned}
$$

由於 $\Delta_3 < 0$，故知 (18) 有三個相異的實數解。接著根據 (10) 求

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\frac{15745}{1458}}{2} + \sqrt{19.52167}i \\
&= -5.39952 + 4.41833i
\end{aligned}
$$

由於 u_1 所對應的點位於第二象限，因此求得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arg}(u_1) &= \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}\left(\frac{15745}{1458}\right)}{2\left(-\frac{1183}{108}\right)\left(\sqrt{\frac{1183}{108}}\right)}\right) \\
&= 2.4558
\end{aligned}
$$

由此根據 (11)、(12) 和 (13)，可求得 (18) 的三個解如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{-25}{3 \times 6} + 2\sqrt{\frac{\frac{1183}{108}}{3}}\left(\cos\frac{2.4558}{3}\right) \\
&= 4 \\
x_2 &= -\frac{-25}{3 \times 6} + 2\sqrt{\frac{\frac{1183}{108}}{3}}\left(\cos\frac{2.4558 + 2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{7}{3} \\
x_3 &= -\frac{-25}{3 \times 6} + 2\sqrt{\frac{\frac{1183}{108}}{3}}\left(\cos\frac{2.4558 + 4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

請注意 (18) 的三個解雖然都是有理數，但在求解過程中，卻出現了無理數以至非實數，這是本網頁介紹的方法的特色。事實上，對於有理係數三次

方程而言，使用「因式定理」(Factor Theorem) 求解，可能比本網頁介紹的方法簡單。不過，本網頁介紹的方法能揭示實係數三次方程在不同情況下的解的特點，因此仍有重要的理論意義。

連結至數學專題
連結至周家發網頁