感受伽羅瓦：伽羅瓦對應

我們在上一章介紹了伽羅瓦擴張 (即同時具備有限性、正規性和可分性的域擴張) 的概念，並指出域擴張 $E : F$ 是伽羅瓦擴張，當且僅當它使求伽羅瓦群的函數 $\mathrm{Gal}(E : \cdot)$ 與求不動域的函數 Fix_E 互為逆函數。伽羅瓦群與不動域是一對相對的概念：一方面，給定 E 的某個子域 F，我們可以求伽羅瓦群 $\mathrm{Gal}(E : F)$，這是 E 上的一個自同構群；另一方面，給定 E 上某些自同構組成的群 G，我們可以求不動域 $\mathrm{Fix}_E(G)$，這是 E 的一個子域。上一章的結論就是, 在伽羅瓦擴張下, 伽羅瓦群與不動域形成一一對應關係。

不過，在伽羅瓦擴張下，伽羅瓦群與不動域的對應關係還不止此。一方面，除了 F 外，E 可能還有其他子域 K，使得 F 是 K 的子域，如用 $\leq$ 代表「子域」關係，即有 $F \leq K \leq E$。這種介乎 F 與 E 之間的子域稱為中間域(intermediate field)，而且這些中間域可能不只一個，形成多重子域結構。就每個中間域 K，我們都可考慮域擴張 $E : K$。另一方面，除了 G 外，E 可能還有其他自同構群 H，使得 H 是 G 的子群，而且這些子群可能不只一個，形成多重子群結構。

如果就 F 與 E 之間的每個中間域 K 計算相應的伽羅瓦群 $\mathrm{Gal}(E : K)$，並且就 G 的每個子群 H 計算相應的不動域 $\mathrm{Fix}_E(H)$，我們將會發現 $\mathrm{Gal}(E : K)$ 與 $\mathrm{Fix}_E(H)$ 之間存在某種對應關係，可以概括為以下公式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(E : K) &= H \qquad (1)\\
\mathrm{Fix}_E(H) &= K \qquad (2)
\end{aligned}
$$

如果中間域 K 和子群 H 滿足上述公式，我們便說 K 與 H 存在對應關係。現在如果把 (2) 代入 (1)，或者把 (1) 代入 (2)，還可得到以下公式 (即顯示 $\mathrm{Gal}(E : \cdot)$ 與 Fix_E 互為逆函數的公式)：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(E : \mathrm{Fix}_E(H)) &= H \qquad (3)\\
\mathrm{Fix}_E(\mathrm{Gal}(E : K)) &= K \qquad (4)
\end{aligned}
$$

請注意以上兩條公式是《感受伽羅瓦：伽羅瓦擴張》中公式 (1) 和 (2) 的推廣，是把該兩條公式中的 G 和 F 分別改為子群 H 和中間域 K 後所得的

結果。

如前所述，要令 $\mathrm{Gal}(E : K)$ 與 $\mathrm{Fix}_E(H)$ 滿足上述對應關係，有關域擴張 $E : K$ 必須是伽羅瓦擴張。但可以證明，只要 $E : F$ 是伽羅瓦擴張，並且 K 是介乎 E 與 F 之間的中間域，則 $E : K$ 必然也是伽羅瓦擴張，因此只要 $E : F$ 是伽羅瓦擴張，$\mathrm{Gal}(E : K)$ 與 $\mathrm{Fix}_E(H)$ 必滿足上述對應關係。

接下來讓我們用一些例子說明上述概念。第一個例子是我們在《感受伽羅瓦：自同構》中討論過的 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}$，我們在上述網頁曾指出這個域擴張使得 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \cdot)$ 與 $\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})}$ 互為逆函數，因此是伽羅瓦擴張。我們也曾指出擴張域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ 可以寫成以下形式：

$$\{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \qquad (5)$$

而相關的伽羅瓦群則可寫成以下形式 (為簡化符號，以下把上述網頁中的 θ_{32} 和 θ_{33} 分別改寫為 α 和 β)：

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}) = \{I, \alpha, \beta, \alpha\beta\} \qquad (6)$$

以下列出上述伽羅瓦群中各個自同構對 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 的作用：

$$\begin{array}{rclcrcl}
I(\sqrt{3}) & = & \sqrt{3} & \qquad & I(\sqrt{5}) & = & \sqrt{5} \\
\alpha(\sqrt{3}) & = & -\sqrt{3} & & \alpha(\sqrt{5}) & = & \sqrt{5} \\
\beta(\sqrt{3}) & = & \sqrt{3} & & \beta(\sqrt{5}) & = & -\sqrt{5} \\
\alpha\beta(\sqrt{3}) & = & -\sqrt{3} & & \alpha\beta(\sqrt{5}) & = & -\sqrt{5}
\end{array}$$

由於確定上述伽羅瓦群的子群比確定上述域與 $\mathbb{Q}$ 之間的中間域容易，我們從較容易的地方入手。讀者可自行驗證，上述伽羅瓦群共有兩個平凡子群：$\{I\}$ 和 $\{I, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ 本身；以及三個非平凡子群：$\{I, \alpha\}$、$\{I, \beta\}$ 和 $\{I, \alpha\beta\}$，現在計算這些子群的不動域。

首先考慮兩個平凡子群，我們有

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\, \sqrt{5})}(\{I\}) & = & \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \qquad (7) \\
\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\, \sqrt{5})}(\{I, \alpha, \beta, \alpha\beta\}) & = & \mathbb{Q} \qquad (8)
\end{array}$$

上面第一個等式的理據可根據恆等函數 I 的性質容易求得，而第二個等式則在《感受伽羅瓦：自同構》中已有解釋，請注意 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ 之間的 (平凡) 中間域。

其次考慮其餘三個非平凡子群。由於 α 的不動點包含 $\sqrt{5}$ 但不包含 $\sqrt{3}$，可

知 $\{I,\alpha\}$ 的不動域包含所有形如 $a+b\sqrt{5}$ (其中 $a,b\in\mathbb{Q}$) 的數，這些數構成 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$，而這是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 之間的另一個中間域，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})}(\{I,\alpha\})=\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \qquad (9)$$

同理，由於 β 的不動點包含 $\sqrt{3}$ 但不包含 $\sqrt{5}$，可知 $\{I,\beta\}$ 的不動域是 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，而這是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 之間的另一個中間域，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})}(\{I,\beta\})=\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \qquad (10)$$

最後，$\alpha\beta$ 的不動點雖然既不包含 $\sqrt{3}$ 也不包含 $\sqrt{5}$，但卻包含 $\sqrt{15}$，這是因為

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\sqrt{15}) &= \alpha\beta(\sqrt{3}\times\sqrt{5})\\ &= \alpha\beta(\sqrt{3})\times\alpha\beta(\sqrt{5})\\ &= (-\sqrt{3})\times(-\sqrt{5})\\ &= \sqrt{15}\end{aligned}$$

由此可知 $\alpha\beta$ 的不動域是 $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$，而這是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 之間的另一個中間域，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})}(\{I,\alpha\beta\})=\mathbb{Q}(\sqrt{15}) \qquad (11)$$

根據以上的討論，我們發現 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 之間有以下五個中間域：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$、$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$、$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$，現在計算這些中間域相對於 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 的伽羅瓦群。對於首兩個中間域而言，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q})$ 的結果見於前面的 (6)，而 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))$ 則無需計算，這是因為顯然只有恆等函數 I 才以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 中的所有元素作為不動點，由此我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))=\{I\} \qquad (12)$$

請注意 $\{I,\alpha,\beta,\alpha\beta\}$ 和 $\{I\}$ 都是 $\{I,\alpha,\beta,\alpha\beta\}$ 的 (平凡) 子群。

接著考慮其餘三個中間域。由於 I 和 β 都是以全體有理數和 $\sqrt{3}$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{3}))=\{I,\beta\} \qquad (13)$$

同理，由於 I 和 α 都是以全體有理數和 $\sqrt{5}$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{5}))=\{I,\alpha\} \qquad (14)$$

最後，由於 I 和 $\alpha\beta$ 都是以全體有理數和 $\sqrt{15}$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

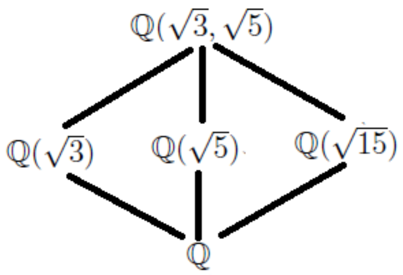
$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{15}))=\{I,\alpha\beta\} \qquad (15)$$

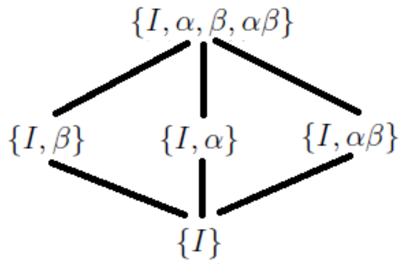
至此討論了五個不動域和五個伽羅瓦群，前者包括 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 之間的五個中間域，後者包括 $\{I,\alpha,\beta,\alpha\beta\}$ 的五個子群，在這些中間域與子群中，$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 與 $\{I\}$、$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 與 $\{I,\beta\}$、$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 與 $\{I,\alpha\}$、$\mathbb{Q}(\sqrt{15})$ 與 $\{I,\alpha\beta\}$，以及 $\mathbb{Q}$ 與 $\{I,\alpha,\beta,\alpha\beta\}$ 分別存在一一對應關係，即這五對中間域和子群各自滿足上面 (1) – (4) 所示的關係。舉例說，從 (14) 和 (9) 可以看到中間域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 與子群 $\{I,\alpha\}$ 滿足前面的公式 (1) 和 (2)。把 (9) 代入 (14) 並且把 (14) 代入 (9)，還可得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})}(\{I,\alpha\})) &= \{I,\alpha\}\\ \mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})}(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{5}))) &= \mathbb{Q}(\sqrt{5})\end{aligned}$$

由此可見 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 與 $\{I,\alpha\}$ 也滿足前面的公式 (3) 和 (4)。

由於各個中間域之間存在包含關係，各個子群之間也存在包含關係，我們可以把這些包含關係表示成「哈斯圖」(Hasse diagram)，現把上列五個中間域和五個子群的哈斯圖並列於下：





在上述哈斯圖中，由直線連接的兩個中間域／子群之間存在包含關係，即位置較低者是位置較高者的子域／子群。

此外，前述的一一對應關係在上圖中還有一種特殊表現，即互相對應的中間域／子群在上面兩個哈斯圖中呈現相反的包含關係。準確地說，若中間域 K_1 與子群 H_1 存在對應關係，而中間域 K_2 與子群 H_2 也存在對應關係，並且 K_1 是 K_2 的子域，則 H_2 是 H_1 的子群。舉例說，中間域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 與子群 $\{I\}$ 存在對應關係，而中間域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 與子群 $\{I,\alpha\}$ 也存在對應關係,並且 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ 的子域,而 $\{I\}$ 則是 $\{I,\alpha\}$ 的子群。

上例所示中間域與伽羅瓦群的子群之間的對應關係稱為伽羅瓦對應(Galois correspondence)，為讓讀者對伽羅瓦對應有更深入的認識，現在再舉另一個例子。這是我們在《感受伽羅瓦：自同構》中討論過的 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}$，我們在上述網頁曾指出這個域擴張使得 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \cdot)$ 與 $\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}$ 互為逆函數，因此是伽羅瓦擴張。我們也曾指出，擴張域 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 可以寫成以下形式：

$$\{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 + d\omega_3 + e\omega_3(\sqrt[3]{2}) + f\omega_3(\sqrt[3]{2})^2 : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\} \qquad (16)$$

而相關的伽羅瓦群則可寫成以下形式 (為簡化符號，以下把上述網頁中的 θ_{52} 和 θ_{53} 分別改寫為 γ 和 δ)，

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}) = \{I, \gamma, \delta, \delta^2, \gamma\delta, \gamma\delta^2\} \qquad (17)$$

以下列出上述伽羅瓦群中各個自同構對 $\sqrt[3]{2}$ 和 ω_3 的作用：

$$\begin{array}{rclcrcl}
I(\sqrt[3]{2}) & = & \sqrt[3]{2} & \qquad & I(\omega_3) & = & \omega_3 \\
\gamma(\sqrt[3]{2}) & = & \omega_3(\sqrt[3]{2}) & & \gamma(\omega_3) & = & {\omega_3}^2 \\
\delta(\sqrt[3]{2}) & = & {\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}) & & \delta(\omega_3) & = & \omega_3 \\
\delta^2(\sqrt[3]{2}) & = & \omega_3(\sqrt[3]{2}) & & \delta^2(\omega_3) & = & \omega_3 \\
\gamma\delta(\sqrt[3]{2}) & = & {\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}) & & \gamma\delta(\omega_3) & = & {\omega_3}^2 \\
\gamma\delta^2(\sqrt[3]{2}) & = & \sqrt[3]{2} & & \gamma\delta^2(\omega_3) & = & {\omega_3}^2
\end{array}$$

如同上一個例子，我們先考慮上述伽羅瓦群的子群。讀者可自行驗證，上述伽羅瓦群共有兩個平凡子群：$\{I\}$ 和 $\{I, \gamma, \delta, \delta^2, \gamma\delta, \gamma\delta^2\}$ 本身；以及四個非平凡子群：$\{I, \gamma\delta^2\}$、$\{I, \delta, \delta^2\}$、$\{I, \gamma\}$ 和 $\{I, \gamma\delta\}$。

首先考慮兩個平凡子群，根據恆等函數 I 的性質以及我們在《感受伽羅瓦：自同構》中的討論，我們有

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I\}) & = & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) & \qquad (18) \\
\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I, \gamma, \delta, \delta^2, \gamma\delta, \gamma\delta^2\}) & = & \mathbb{Q} & \qquad (19)
\end{array}$$

請注意 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 之間的 (平凡) 中間域。

其次考慮其餘四個非平凡子群。由於 $\gamma\delta^2$ 的不動點包含所有有理數和 $\sqrt[3]{2}$，但不包含 ω_3 和 ${\omega_3}^2$，可知 $\{I, \gamma\delta^2\}$ 的不動域是 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$，而這是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 之間的另一個中間域，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I, \gamma\delta^2\}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \qquad (20)$$

同理，由於 δ 和 δ^2 的不動點包含所有有理數和 ω_3，但不包含 $\sqrt[3]{2}$，可知 $\{I, \delta, \delta^2\}$ 的不動域是 $\mathbb{Q}(\omega_3)$，而這是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 之間的另一個中間域，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I, \delta, \delta^2\}) = \mathbb{Q}(\omega_3) \qquad (21)$$

最後，γ 和 $\gamma\delta$ 的不動點雖然既不包含 $\sqrt[3]{2}$ 也不包含 ω_3，但 γ 的不動點卻包含 ${\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})$(以及所有有理數)，這是因為

$$\begin{aligned} \gamma({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})) &= (\gamma(\omega_3))^2 \times \gamma(\sqrt[3]{2}) \\ &= ({\omega_3}^2)^2 \times \omega_3(\sqrt[3]{2}) \\ &= {\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

而 $\gamma\delta$ 的不動點卻包含 $\omega_3(\sqrt[3]{2})$(以及所有有理數)，這是因為

$$\begin{aligned} \gamma\delta(\omega_3(\sqrt[3]{2})) &= \gamma\delta(\omega_3) \times \gamma\delta(\sqrt[3]{2}) \\ &= {\omega_3}^2 \times {\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}) \\ &= \omega_3(\sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

由此可知 $\{I, \gamma\}$ 的不動域是 $\mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}))$，$\{I, \gamma\delta\}$ 的不動域則是 $\mathbb{Q}(\omega_3(\sqrt[3]{2}))$，而這兩個域也都是 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 之間的中間域[1]，由此我們有

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I, \gamma\}) = \mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})) \qquad (22)$$

$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)}(\{I, \gamma\delta\}) = \mathbb{Q}(\omega_3(\sqrt[3]{2})) \qquad (23)$$

根據以上的討論，我們發現 $\mathbb{Q}$ 與 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 之間有以下六個中間域：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$、$\mathbb{Q}(\omega_3)$、$\mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}))$ 和 $\mathbb{Q}(\omega_3(\sqrt[3]{2}))$，現在計算這些中間域相對於 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 的伽羅瓦群。對於首兩個中間域而言，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q})$ 的結果見於前面的 (17)，而 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3))$ 則如同上例一樣無需計算，因為我們必有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)) = \{I\} \qquad (24)$$

請注意 $\{I, \gamma, \delta, \delta^2, \gamma\delta, \gamma\delta^2\}$ 和 $\{I\}$ 都是 $\{I, \gamma, \delta, \delta^2, \gamma\delta, \gamma\delta^2\}$ 的 (平凡) 子群。

接著考慮其餘四個中間域。由於 I 和 $\gamma\delta^2$ 都是以全體有理數和 $\sqrt[3]{2}$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{I, \gamma\delta^2\} \qquad (25)$$

同理，由於 I、δ 和 δ^2 都是以全體有理數和 ω_3 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3) : \mathbb{Q}(\omega_3)) = \{I, \delta, \delta^2\} \qquad (26)$$

---

[1]如要把 ${\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})$ 寫成上面 (16) 中的元素的形式，可以先運用《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中介紹的公式 $1 + \omega_3 + {\omega_3}^2 = 0$，從而得到 ${\omega_3}^2 = -1 - \omega_3$，然後便可求得 ${\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}) = -\sqrt[3]{2} - \omega_3(\sqrt[3]{2})$，由此可見 ${\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})$ 確是 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 的元素，而 $\mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}))$ 確是 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega_3)$ 的子域。

同理，由於 I 和 $\gamma\delta$ 是以全體有理數和 $\omega_3(\sqrt[3]{2})$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3):\mathbb{Q}(\omega_3(\sqrt[3]{2})))=\{I,\gamma\delta\} \qquad (27)$$

最後，由於 I 和 γ 是以全體有理數和 ${\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})$ 作為不動點的自同構，並且沒有其他自同構具有此性質，我們有

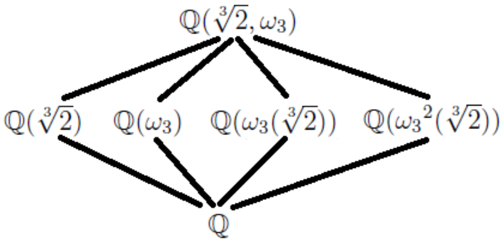
$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3):\mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2})))=\{I,\gamma\} \qquad (28)$$

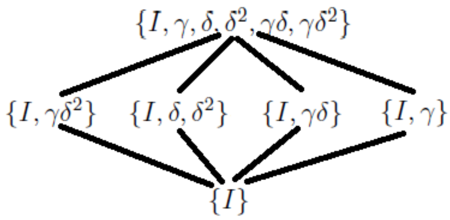
至此討論了六個不動域和六個伽羅瓦群, 在這些中間域與子群中, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3)$ 與 $\{I\}$、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 與 $\{I,\gamma\delta^2\}$、$\mathbb{Q}(\omega_3)$ 與 $\{I,\delta,\delta^2\}$、$\mathbb{Q}(\omega_3(\sqrt[3]{2}))$ 與 $\{I,\gamma\delta\}$，以及 $\mathbb{Q}({\omega_3}^2(\sqrt[3]{2}))$ 與 $\{I,\gamma\}$ 分別存在一一對應關係，即這六對中間域和子群各自滿足 (1)–(4) 所示的關係。舉例說，從 (26) 和 (21) 可以看到中間域 $\mathbb{Q}(\omega_3)$ 與子群 $\{I,\delta,\delta^2\}$ 滿足公式 (1) 和 (2)。把 (21) 代入 (26) 並且把 (26) 代入 (21)，還可得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3):\mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3)}(\{I,\delta,\delta^2\})) &= \{I,\delta,\delta^2\}\\ \mathrm{Fix}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3)}(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3):\mathbb{Q}(\omega_3))) &= \mathbb{Q}(\omega_3)\end{aligned}$$

由此可見 $\mathbb{Q}(\omega_3)$ 與 $\{I,\delta,\delta^2\}$ 也滿足公式 (3) 和 (4)。

以下是這六個中間域和六個子群的哈斯圖：





前述中間域／子群的相反包含關係也見於上圖。舉例說，中間域 $\mathbb{Q}(\omega_3)$ 與子群 $\{I,\delta,\delta^2\}$ 存在對應關係，而中間域 $\mathbb{Q}$ 與子群 $\{I,\gamma,\delta,\delta^2,\gamma\delta,\gamma\delta^2\}$ 也存在對應關係, 並且 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}(\omega_3)$ 的子域, 而 $\{I,\delta,\delta^2\}$ 則是 $\{I,\gamma,\delta,\delta^2,\gamma\delta,\gamma\delta^2\}$ 的子群。從上述討論可見，前述的伽羅瓦對應關係在域擴張 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega_3):\mathbb{Q}$ 上成立。伽羅瓦對應還有其他特殊表現，這是下一章的內容。

連結至數學專題

連結至周家發網頁