

## 數學示例：希爾伯特-施密特理論

我們在《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》和《數學示例：傅立葉級數》中介紹了「自伴算子」、「特徵函數」、「傅立葉級數」等概念，這些構成與「微分／差分方程邊值問題」相關的「施圖姆-劉維爾理論」的內容。有趣的是，上述概念也可推廣應用於「弗雷德霍姆積分／和分方程」，構成希爾伯特-施密特理論(Hilbert-Schmidt Theory)的內容，本文主旨是簡介這些概念在上述積分／和分方程上的應用。

首先介紹具有以下形式的「自伴算子積分方程」：

$$f(x) + \lambda T_f f(x) = 0, \text{ 其中 } T_f f(x) = \int_{t=a}^{t=b} K(x, t) f(t) \quad (1)$$

上式中的  $T_f$  是一種「自伴算子」，其中的核  $K(x, t)$  須具有以下對稱性：

$$K(x, t) = K(t, x) \quad (2)$$

故稱對稱核(symmetric kernel)。由於 (1) 是「齊次方程」，不論  $\lambda$  取甚麼值，它都有  $f(x) = 0$  這個「平凡解」。現在我們的問題是， $\lambda$  在取何值的情況下 (1) 有「非平凡解」(請注意這個值必不等於 0)？沿用《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中的概念，以下把這樣的  $\lambda$  值稱為 (1) 的「特徵值」，並把相關的非平凡解稱為「特徵函數」。但跟「自伴算子微分方程」不同，「自伴算子積分方程」並不附帶「權重函數」(也可說這類方程的權重函數為常值函數  $w(x) = 1$ )。

我們在《數學示例：可分變項與可分核》中介紹了求解具有「可分核」的弗雷德霍姆積分／和分方程的方法，因此以下只討論具有「可分對稱核」的方程。首先考慮以下積分方程：

$$f(x) - \lambda \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(x+t) f(t) = 0 \quad (3)$$

上式中的核  $-\sin(x+t)$  是對稱的，我們運用三角恆等式  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  把上式改寫成帶有可分核的形式：

$$f(x) - \lambda \int_{t=0}^{t=\pi} (\sin x \cos t + \cos x \sin t) f(t) = 0 \quad (4)$$

運用上述網頁的方法，首先定義以下常數：

$$c_1 = \int_{t=0}^{t=\pi} \cos t f(t) \quad (5)$$

$$c_2 = \int_{t=0}^{t=\pi} \sin t f(t) \quad (6)$$

由此可把 (4) 改寫成

$$f(x) = \lambda(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \quad (7)$$

把上式依次代入 (5) 和 (6) 並進行定積分運算，可得到以下 1 次方程組：

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{2}c_2\lambda\pi = 0 \\ c_2 - \frac{1}{2}c_1\lambda\pi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

從上面第二個方程可得  $c_2 = \frac{1}{2}c_1\lambda\pi$ ，把這個  $c_2$  代入上面第一個方程可得  $c_1(1 - \frac{1}{4}\lambda^2\pi^2) = 0$ 。現在如果  $c_1 = 0$ ，那麼由上面第二個方程必也有  $c_2 = 0$ ，這樣根據 (7)，(4) 只有平凡解  $f(x) = 0$ 。為得到非平凡解，必須假設  $c_1 \neq 0$ ，由此必有

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4}\lambda^2\pi^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad (9)$$

如把  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  代入 (8)，可得到  $c_2 = c_1$ ，把此一結果代入 (7)，可得 (4) 的一個非平凡解  $f(x) = \frac{2c_1}{\pi}(\sin x + \cos x)$ 。如把  $\lambda = -\frac{2}{\pi}$  代入 (8)，則可得到  $c_2 = -c_1$ ，把此一結果代入 (7)，可得 (4) 的另一個非平凡解  $f(x) = \frac{2c_1}{\pi}(\sin x - \cos x)$ 。總括而言，(4) 有以下兩個特徵值和相應的特徵函數<sup>1</sup>：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2}{\pi}, & f_1(x) &= \sin x + \cos x \\ \lambda_2 &= -\frac{2}{\pi}, & f_2(x) &= \sin x - \cos x \end{aligned} \quad (10)$$

接著介紹具有以下形式的「自伴算子和分方程」：

$$f(x) + \lambda T_{\Sigma} f(x) = 0, \text{ 其中 } T_{\Sigma} f(x) = \sum_{t=a}^{t=b} K(x, t) f(t) \quad (11)$$

<sup>1</sup>請注意把特徵函數乘以任何常數，所得結果仍是特徵函數，所以下把特徵函數寫成較簡單的形式。

上式中的  $T_{\Sigma}$  也是一種「自伴算子」，其中的核  $K(x, t)$  也必須是對稱核。跟自伴算子積分方程相似，「特徵值」和「特徵函數」概念也適用於自伴算子和分方程。舉例說，考慮以下和分方程：

$$f(x) - \lambda \sum_{t=0}^{t=4} (x+t)f(t) = 0 \quad (12)$$

上式中的核  $-(x+t)$  是對稱並且可分的。運用《數學示例：可分變項與可分核》的方法，首先定義以下常數：

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=4} f(t) \quad (13)$$

$$c_2 = \sum_{t=0}^{t=4} tf(t) \quad (14)$$

由此可把 (12) 改寫成

$$f(x) = \lambda(c_1x + c_2) \quad (15)$$

把上式依次代入 (13) 和 (14) 並進行定和分運算，可得到以下 1 次方程組：

$$\begin{cases} c_1 - 10c_1\lambda - 5c_2\lambda = 0 \\ c_2 - 30c_1\lambda - 10c_2\lambda = 0 \end{cases} \quad (16)$$

從上面第一個方程可得  $c_2 = \frac{c_1 - 10c_1\lambda}{5\lambda}$ ，把這個  $c_2$  代入上面第二個方程可得  $c_1(50\lambda^2 + 20\lambda - 1) = 0$ 。現在如果  $c_1 = 0$ ，那麼由上面第一個方程必也有  $c_2 = 0$ ，這樣根據 (15)，(12) 只有平凡解  $f(x) = 0$ 。為得到非平凡解，必須假設  $c_1 \neq 0$ ，由此必有

$$\begin{aligned} 50\lambda^2 + 20\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{10} \end{aligned} \quad (17)$$

如把  $\lambda = \frac{-2+\sqrt{6}}{10}$  代入 (16)，可得到  $c_2 = \sqrt{6}c_1$ ，把此一結果代入 (15)，可得 (12) 的一個非平凡解  $f(x) = \frac{(-2+\sqrt{6})c_1}{10}(x + \sqrt{6})$ 。如把  $\lambda = \frac{-2-\sqrt{6}}{10}$  代入 (16)，則可得到  $c_2 = -\sqrt{6}c_1$ ，把此一結果代入 (15)，可得 (12) 的另一個非平凡解  $f(x) = \frac{(-2-\sqrt{6})c_1}{10}(x - \sqrt{6})$ 。總括而言，(12) 有以下兩個特徵值和相應的特徵函數：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-2+\sqrt{6}}{10}, & f_1(x) &= x + \sqrt{6} \\ \lambda_2 &= \frac{-2-\sqrt{6}}{10}, & f_2(x) &= x - \sqrt{6} \end{aligned} \quad (18)$$

我們在《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中也介紹了函數之間「內積」的概念，此一概念也適用於本文討論的函數，其定義如下。設  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  為受到 (1) 中算子  $T_f$  作用的連續實值函數，則 (以下定義等同於上述網頁的 (27))：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) \quad (19)$$

設  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  為受到 (11) 中算子  $T_\Sigma$  作用的離散實值函數，則 (以下定義基本等同於上述網頁的 (28)，但其上、下限有所不同)：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_a^b f_1(x)f_2(x) \quad (20)$$

我們有以下定理。

**定理 1**：設  $\langle \rangle$  如上定義，

- (i) 設  $T_f$  為 (1) 中的算子，並且  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  為受到這個算子作用的連續實值函數，則有

$$\langle T_f f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T_f f_2 \rangle \quad (21)$$

- (ii) 設  $T_\Sigma$  為 (11) 中的算子，並且  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  為受到這個算子作用的離散實值函數，則有

$$\langle T_\Sigma f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T_\Sigma f_2 \rangle \quad (22)$$

請注意上述定理中的關係 (21) 和 (22) 跟上述網頁「定理 1」中的關係 (29) 和 (30) 相同，這就是我們把  $T_f$  和  $T_\Sigma$  也稱為「自伴算子」的原因。容易看到 (21) 和 (22) 成立，以 (21) 為例，根據 (19) 和 (1)，並運用 (2) 和《數學示例：偏微／差分與重積／和分》中的「定理 2」，我們有

$$\begin{aligned} \langle T_f f_1, f_2 \rangle &= \int_a^b T_f f_1(x)f_2(x) \\ &= \int_{x=a}^{x=b} \int_{t=a}^{t=b} K(x, t)f_1(t)f_2(x) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \int_{x=a}^{x=b} K(t, x)f_1(t)f_2(x) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} f_1(t) \int_{x=a}^{x=b} K(t, x)f_2(x) \\ &= \int_a^b f_1(t)T_f f_2(t) \\ &= \langle f_1, T_f f_2 \rangle \end{aligned}$$

「正交」和「範數」的概念也可推廣到積分／和分方程（這裡無需應用權重函數）。設  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  為如上定義的函數，如果下式成立，則它們正交（下式大致等於《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中的 (35)）：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \quad (23)$$

$f_1(x)$  的範數則定義如下（下式大致等於《數學示例：傅立葉級數》中的 (1)）：

$$\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} \quad (24)$$

以下定理提供自伴算子積分／和分方程特徵值和特徵函數的一些重要性質。

**定理 2**：方程 (1) 和 (11) 有有限多個或可數無窮多個特徵值，這些特徵值全為實數，對應於不同特徵值的特徵函數互相正交。

接下來讓我們用 (18) 中的兩個特徵函數  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  驗證上述定理，根據 (20)，我們有

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_0^4 (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) \\ &= \sum_0^4 (x^2 - 6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此可見  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的確互相正交。

此外，還可以從每個自伴算子積分／和分方程得到一個「特徵函數正交歸一序列」 $(f_n)_{n \in I}$ ，其中各個成員互相正交，並且其範數都等於 1（把函數  $f$  除以其範數  $\|f\|$ ，其結果  $\frac{f}{\|f\|}$  就是一個其範數等於 1 的函數）。這個序列的重要性在於，任何可以表示成  $T_f f(x)$ （若有關方程是積分方程並且  $f(x)$  是連續函數）或  $T_\Sigma f(x)$ （若有關方程是和分方程並且  $f(x)$  是離散函數）的函數  $g(x)$  都可在形式上表示成這個序列中成員的「傅立葉級數」，即以下線性組合：

$$g(x) = \sum_{n \in I} c_n f_n(x) \quad (25)$$

上式中的實係數  $c_n$  可用下式計算出來：

$$c_n = \langle g, f_n \rangle \quad (26)$$

舉例說，考慮積分方程 (3) 的特徵函數 (列於 (10))，根據 (24)，可求得

$$\|\sin x + \cos x\| = \sqrt{\int_0^\pi (\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{\pi} \quad (27)$$

$$\|\sin x - \cos x\| = \sqrt{\int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2} = \sqrt{\pi} \quad (28)$$

從以上結果可得到 (3) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$\left(\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{\pi}\right), \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \quad (29)$$

現設有函數

$$\begin{aligned} g(x) &= T_f x \\ &= -\int_{t=0}^{t=\pi} (\sin(x+t) \times t) \\ &= 2 \sin x - \pi \cos x, \quad x \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (30)$$

由於  $2 \sin x - \pi \cos x$  可以表示成  $T_f x$ ，這個連續函數應可表示成 (29) 中序列成員的傅立葉級數。接著用 (26) 求這個級數的兩個係數如下：

$$c_1 = \int_0^\pi (2 \sin x - \pi \cos x) \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2 - \pi)}{2} \quad (31)$$

$$c_2 = \int_0^\pi (2 \sin x - \pi \cos x) \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2 + \pi)}{2} \quad (32)$$

從以上結果可得 (30) 的連續傅立葉級數展開式如下：

$$2 \sin x - \pi \cos x = \frac{\sqrt{\pi}(2 - \pi)}{2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}(2 + \pi)}{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \quad (33)$$

接著考慮和分方程 (12) 的特徵函數 (列於 (18))，根據 (24)，可求得

$$\|x + \sqrt{6}\| = \sqrt{\sum_0^4 (x + \sqrt{6})^2} = \sqrt{60 + 20\sqrt{6}} \quad (34)$$

$$\|x - \sqrt{6}\| = \sqrt{\sum_0^4 (x - \sqrt{6})^2} = \sqrt{60 - 20\sqrt{6}} \quad (35)$$

從以上結果可得到 (12) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$\left( \frac{-2 + \sqrt{6}}{10}, \frac{-2 - \sqrt{6}}{10} \right), \left( \frac{x + \sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}}, \frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \right) \quad (36)$$

現設有函數

$$\begin{aligned} g(x) &= T_{\Sigma}(2 - x) \\ &= \sum_{t=0}^{t=4} (-(x + t)(2 - t)) \\ &= 10, \quad x \in \{0, \dots, 4\} \end{aligned} \quad (37)$$

由於 10 可以表示成  $T_{\Sigma}(2 - x)$ ，這個 (常值) 離散函數應可表示成 (36) 中序列成員的傅立葉級數。接著用 (26) 求這個級數的兩個係數如下：

$$c_1 = \sum_0^4 10 \left( \frac{x + \sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \right) = \frac{100 + 50\sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \quad (38)$$

$$c_2 = \sum_0^4 10 \left( \frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \right) = \frac{100 - 50\sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \quad (39)$$

從以上結果可得 (37) 的離散傅立葉級數展開式如下：

$$10 = \frac{100 + 50\sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \left( \frac{x + \sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \right) + \frac{100 - 50\sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \left( \frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \right) \quad (40)$$

上述傅立葉級數也可用於求解「自伴算子非齊次積分方程」和「自伴算子非齊次和分方程」，這兩類方程分別具有以下一般形式：

$$f(x) + \mu T_f f(x) + g(x) = 0 \quad (41)$$

$$f(x) + \mu T_{\Sigma} f(x) + g(x) = 0 \quad (42)$$

其中的  $g(x)$  和  $\mu$  分別是給定的函數和實數。在上式中，如果設定  $g(x) = 0$  並且以參數  $\lambda$  代替  $\mu$ ，可得到與上述方程相關的「自伴算子齊次積分/和分方程」。現設根據前面介紹的方法求得這個齊次方程的特徵值序列  $(\lambda_n)_{n \in I}$  和相對應的正交歸一特徵函數序列  $(f_n)_{n \in I}$ 。根據特徵值和特徵函數的定義，對於每個  $n \in I$ ，我們有 (以下用  $T$  概括  $T_f$  和  $T_{\Sigma}$ )：

$$T f_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} f_n(x) \quad (43)$$

由於  $g(x)$  不一定能表示成  $(f_n)_{n \in I}$  成員的傅立葉級數，以下假設未知函數可寫成以下形式：

$$f(x) = -g(x) + \sum_{n \in I} d_n f_n(x) \quad (44)$$

接下來要解出各個  $d_n$ 。為此，把 (44) 和 (43) 代入 (41) 或 (42) 的第一行 (但把下標  $n$  改為  $m$ )，並加以整理：

$$\begin{aligned} -g(x) + \sum_{m \in I} d_m f_m(x) + \mu T \left( -g(x) + \sum_{m \in I} d_m f_m(x) \right) + g(x) &= 0 \\ \sum_{m \in I} d_m f_m(x) - \mu T g(x) - \mu \sum_{m \in I} \frac{d_m}{\lambda_m} f_m(x) &= 0 \\ \sum_{m \in I} \left( d_m - \frac{\mu d_m}{\lambda_m} \right) f_m(x) - \mu T g(x) &= 0 \end{aligned}$$

接著把上式兩端同時與  $f_n(x)$  進行內積運算，並利用內積運算的線性性質、 $(f_n)_{n \in I}$  的正交歸一性質以及「定理 1」，可推導出

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{m \in I} \left( d_m - \frac{\mu d_m}{\lambda_m} \right) f_m(x) - \mu T g(x), f_n(x) \right\rangle &= 0 \\ d_n - \frac{\mu d_n}{\lambda_n} - \langle \mu g(x), T f_n(x) \rangle &= 0 \\ d_n \left( 1 - \frac{\mu}{\lambda_n} \right) + \frac{\mu \langle g(x), f_n(x) \rangle}{\lambda_n} &= 0 \quad (45) \end{aligned}$$

由此可解出  $d_n$  如下：

$$d_n = \frac{\mu}{\mu - \lambda_n} \langle g(x), f_n(x) \rangle \quad (46)$$

請注意如果  $g(x)$  可表示成  $(f_n)_{n \in I}$  成員的傅立葉級數，那麼上式中的  $\langle g(x), f_n(x) \rangle$  便等於上述傅立葉級數中  $f_n$  項的係數。

接下來要考慮三種情況。情況 (i)：對任何  $n \in I$ ，都有  $\mu \neq \lambda_n$ 。在此情況下，(41) 或 (42) 有唯一解 (44)，其中的  $d_n$  由 (46) 給出。情況 (ii)：有至少一個  $i \in I$  使得  $\mu = \lambda_i$ ，並且  $\langle g(x), f_n(x) \rangle = 0$ 。這即是說，當  $n = i$ ，不論  $d_i$  取何值，(45) 都必然得到滿足 (因為等號兩端都是 0)，因而  $d_i$  不受任何限制，實際是一個任意常數，而其他  $d_n$  (其中  $n \neq i$ ) 則仍由 (46) 給出，因此 (41) 或 (42) 有包含任意常數的解。情況 (iii)：有至少一個  $n \in I$  使得  $\mu = \lambda_n$ ，並且  $\langle g(x), f_n(x) \rangle \neq 0$ 。這即是說，當  $n = i$ ，不論  $d_i$

取何值, (45) 都得不到滿足 (因為等號左端不是 0), 因此 (41) 或 (42) 沒有解。

舉例說, 考慮以下非齊次積分方程：

$$f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(x+t)f(t) + 1 = 0 \quad (47)$$

把上式與 (41) 比較, 如設定  $K(x, t) = -\sin(x+t)$ ,  $\mu = -\frac{1}{\pi}$ ,  $g(x) = 1$ , 那麼 (3) 就是與上述方程相關的齊次方程, 而 (3) 的特徵值和特徵函數正交歸一序列則載於 (29)。由於對任何  $n \in \{1, 2\}$ ,  $-\frac{1}{\pi} \neq \lambda_n$ , 這屬於上述情況 (i), 可知 (47) 有唯一解。由於  $g(x)$  不能表示成 (29) 中正交歸一序列成員的傅立葉級數<sup>2</sup>, 根據 (46), 先求：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\frac{1}{\pi}}{-\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}} \int_0^\pi (1 \times \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \\ d_2 &= \frac{-\frac{1}{\pi}}{-\frac{1}{\pi} - (-\frac{2}{\pi})} \int_0^\pi (1 \times \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (48)$$

把以上結果代入 (44), 便可求得 (47) 的解為

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &= -1 - \frac{4}{3\pi} \sin x + \frac{8}{3\pi} \cos x \end{aligned} \quad (49)$$

如把 (47) 改為以下方程：

$$f(x) + \frac{2}{\pi} \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(x+t)f(t) + \sin x + \cos x = 0 \quad (50)$$

這裡有  $\mu = -\frac{2}{\pi}$ ,  $g(x) = \sin x + \cos x$ 。由於根據 (29),  $-\frac{2}{\pi} = \lambda_2$ , 並且  $\langle g(x), f_2(x) \rangle = \int_0^\pi (\sin x + \cos x) \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) = 0$ , 這屬於上述情況 (ii), 可知  $d_2$  是任意常數。另外, 容易看到  $\sin x + \cos x$  可以表示成 (29) 中正交歸一序列的傅立葉級數： $\sin x + \cos x = \sqrt{\pi} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}$ , 即有  $\langle g(x), f_1(x) \rangle = \sqrt{\pi}$ 。根據 (46), 我們有

$$d_1 = \frac{-\frac{2}{\pi}}{-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}} \times \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (51)$$

綜合以上結果, 可得到 (50) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin x - \cos x + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) + d_2 \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &= -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + c(\sin x - \cos x) \end{aligned} \quad (52)$$

<sup>2</sup>如假設 1 可以表示成上述傅立葉級數, 並用 (26) 求得  $c_1 = c_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ , 所得傅立葉級數並不等於 1, 即有  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}} \right) \neq 1$ 。

其中  $c = \frac{d_2}{\sqrt{\pi}}$  是任意常數。

接著考慮以下非齊次和分方程：

$$f(x) - \frac{\sqrt{6}}{10} \sum_{t=0}^{t=4} (x+t)f(t) + 10 = 0 \quad (53)$$

把上式與 (42) 比較，如設定  $K(x,t) = -(x+t)$ ,  $\mu = \frac{\sqrt{6}}{10}$ ,  $g(x) = 10$ , 那麼 (12) 就是與上述方程相關的齊次方程，而 (12) 的特徵值和特徵函數正交歸一序列則載於 (36)。由於對任何  $n \in \{1, 2\}$ ,  $\frac{\sqrt{6}}{10} \neq \lambda_n$ , 這屬於上述情況 (i), 可知 (53) 有唯一解。由於  $g(x)$  可以表示成 (36) 中正交歸一序列成員的傅立葉級數 (見 (40)), 根據 (46), 我們有

$$\begin{aligned} d_1 &= \left( \frac{\frac{\sqrt{6}}{10}}{\frac{\sqrt{6}}{10} - \frac{-2+\sqrt{6}}{10}} \right) \left( \frac{100+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}} \right) = \frac{150+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}} \\ d_2 &= \left( \frac{\frac{\sqrt{6}}{10}}{\frac{\sqrt{6}}{10} - \frac{-2-\sqrt{6}}{10}} \right) \left( \frac{100-50\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}} \right) = \frac{90-40\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}} \end{aligned} \quad (54)$$

把以上結果代入 (44), 便可求得 (53) 的解為

$$\begin{aligned} f(x) &= -10 + \frac{150 + 50\sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \left( \frac{x + \sqrt{6}}{\sqrt{60 + 20\sqrt{6}}} \right) + \frac{90 - 40\sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \left( \frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{60 - 20\sqrt{6}}} \right) \\ &= \left( 3 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) x - 7 + 2\sqrt{6} \quad (55) \end{aligned}$$

如把 (53) 改為以下方程：

$$f(x) - \frac{-2 + \sqrt{6}}{10} \sum_{t=0}^{t=4} (x+t)f(t) + 1 = 0 \quad (56)$$

這裡有  $\mu = \frac{-2+\sqrt{6}}{10}$ ,  $g(x) = 1$ 。由於根據 (36),  $\frac{-2+\sqrt{6}}{10} = \lambda_1$  並且  $\langle g(x), f_1(x) \rangle = \sum_0^4 (1 \times \frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}) \neq 0$ , 這屬於上述情況 (iii), 可知 (56) 沒有解。

連結至數學專題  
連結至周家發網頁