數學示例：內積空間

內積空間(inner product space) 是「泛函分析」的基本課題，這是在一個向量空間 $V_{\mathbb{F}}$ 之上加上一個稱為內積(inner product) 的二元函數而得的結構(就正如「賦範空間」是在一個向量空間之上加上一個稱為「範數」的一元實值函數而得的結構一樣)。這裡 $V_{\mathbb{F}}$ 代表由向量集合 V 和純量集合 $\mathbb{F}$ 組成的向量空間 (本文只考慮 $\mathbb{F}$ 為 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 的情況)，而上述「內積」函數則是以 V 的兩個元素為輸入項 (又稱「論元」(argument)) 並以 $\mathbb{F}$ 的元素為輸出項 (又稱「值」(value)) 的函數。在數學上，一般使用符號 $\langle\ \rangle$ 表示內積。內積須滿足一系列公理，設 x, y, z 為 V 的成員，a 為 $\mathbb{F}$ 的成員，則

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ii) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(v) $\langle x, x\rangle = 0$ 當且僅當 $x = 0$

上面公理 (iii) 的上劃線代表求「共軛複數」的運算，即若 $x = a + bi$，則 $\overline{x} = a - bi$。

由於內積空間的定義包含一個向量空間 $V_{\mathbb{F}}$ 和一個內積 $\langle\ \rangle$，嚴格地說，內積空間應表示成有序對 $(V_{\mathbb{F}}, \langle\ \rangle)$ 的形式，但若在某些特殊情況下或根據上下文，純量集合 $\mathbb{F}$ 和內積 $\langle\ \rangle$ 不言而喻，那麼也可把 $\mathbb{F}$ 和 $\langle\ \rangle$ 省略，即僅用 V 代表內積空間。

上列內積的五條公理是數學家把向量代數中實數向量的「點積」(dot product) 運算推廣到一般向量空間的結果，即 $\langle x, y\rangle$ 是點積 $x \bullet y$ 的推廣。公理 (i) 和 (ii) 是說 $\langle\ \rangle$ 是關於其第一個論元的線性函數[1]。公理 (iii) 是說把 $\langle\ \rangle$

[1]在向量代數中，函數 f 是線性的當且僅當對任何向量 x、y 和任何純量 a，都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 並且 $f(ax) = af(x)$。

中的兩個論元對調位置，所得結果等於原來內積的共軛複數。由於對於實數 x 而言，$\overline{x} = x$，[2]因此如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，則公理 (iii) 可以簡化為

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad (1)$$

如果 (1) 成立，那麼從公理 (i) 和 (ii) 可得，

$$\begin{aligned}
\langle x, y+z\rangle &= \langle y+z, x\rangle \\
&= \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \\
\langle x, ay\rangle &= \langle ay, x\rangle \\
&= a\langle y, x\rangle \\
&= a\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

上述結果顯示，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，那麼 $\langle\ \rangle$ 是關於其兩個論元的對稱函數，而且是關於其第二個論元的線性函數，這正是一般點積的性質。

此外，上面的公理 (iv) 和 (v) 說，以同一個數 x 作為 $\langle\ \rangle$ 的兩個論元，所得結果是非負實數[3]，而且只有當 $x = 0$ 時，所得結果才是 0。請注意上述公理 (iv) 和 (v) 跟我們在《數學示例：賦範空間》中介紹的「範數」的公理 (i) 和 (ii) 很相似。事實上，給定一個內積空間，可以利用其內積函數 $\langle\ \rangle$ 來定義以下範數：

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (2)$$

可以證明，上式定義的 $\|\ \|$ 符合上述網頁列出的範數所須滿足的四條公理，由此可知任何內積空間都是賦範空間。

利用內積，還可以定義數學上的正交(orthogonality) 概念，設 x 和 y 是某內積空間中的成員，則 x 與 y 正交當且僅當 $\langle x, y\rangle = 0$。「正交」其實就是幾何學上的「垂直」(perpendicularity) 概念的別名，由此可見，內積讓我們可以把幾何學上的垂直概念推廣到一般的向量空間中。

內積空間的典型例子是 $\mathbb{R}^n$ 連同其上的點積,設有 $\mathbb{R}^n$ 的兩個元素 $(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $(y_1, \ldots, y_n)$，那麼這兩個元素的內積就是它們的點積，即

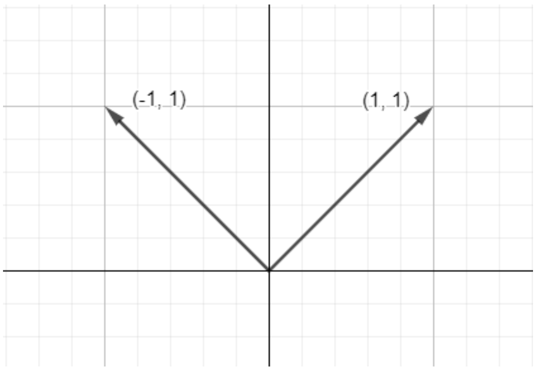
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle_1 = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \qquad (3)$$

舉例說, 考慮 $\mathbb{R}^2$ 中的元素 $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$, 它們的內積是 $\langle (1, 1), (-1, 1)\rangle_1 = (1)(-1) + (1)(1) = 0$。由此可見，$\mathbb{R}^2$ 中的這兩個元素是正交的，而這符合

[2]這是因為若 x 是實數，則 $x = x + 0i = x - 0i$，故有 $\overline{x} = \overline{x + 0i} = x - 0i = x$。

[3]雖然內積空間的定義只規定 $\langle\ \rangle$ 的值是域 $\mathbb{F}$ 的元素，但上述公理 (iv) 規定了當 $\langle\ \rangle$ 的兩個論元是同一個 x 時，$\langle\ \rangle$ 的值須具備大小比較關係，而在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 中，只有 $\mathbb{R}$ 具備這種關係，因此公理 (iv) 實質上規定了當 $\langle\ \rangle$ 的兩個論元是同一個 x 時，$\langle\ \rangle$ 的值須為實數。

我們的直觀，這是因為如果把這兩個元素表示成平面上的向量，那麼可以看到這兩個向量確是互相垂直的，如下圖所示：



此外，利用上述 (2) 和 (3)，可以為 $\mathbb{R}^n$ 定義以下範數：

$$\begin{aligned}\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= \sqrt{\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)\rangle_1} \\ &= \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}\end{aligned}$$

上述範數正好等於《數學示例：賦範空間》中的範數 $\| \ \|_1$ (即該網頁的公式 (2))。

原則上我們可以把 $\mathbb{R}^n$ 推廣為 $\mathbb{C}$ 上的向量空間 $\mathbb{C}^n$，但為了滿足上述公理，$\mathbb{C}^n$ 上的內積函數須採取以下形式 (在下式中，$(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $(y_1, \ldots, y_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的元素)：

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle_2 = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} \qquad (4)$$

請注意若 $(y_1, \ldots, y_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，則上式跟上面的 (3) 一致。舉例說，考慮 $\mathbb{C}^2$ 中的元素 $(1+2i, 3+4i)$ 和 $(5+6i, 7+8i)$，它們的內積是 $\langle (1+2i, 3+4i), (5+6i, 7+8i)\rangle_1 = (1+2i)(5-6i)+(3+4i)(7-8i) = 70+8i$。

利用上述 (2) 和 (4)，可以為 $\mathbb{C}^n$ 定義以下範數 (在下式中，$(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的元素)：

$$\begin{aligned}\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &= \sqrt{\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)\rangle_2} \\ &= \sqrt{x_1\overline{x_1} + \ldots + x_n\overline{x_n}}\end{aligned}$$

對任何複數 x 而言，$x\overline{x} = |x|^2$，其中 $|x|$ 代表 x 的「模」(modulus)，是一個非負實數[4]，因此 $\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)\rangle_2$ 必然是非負實數，滿足公理

[4]這是因為若把 x 寫成 $a+bi$ 的形式 (其中 a 和 b 是實數)，則 $x\overline{x} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$。另一方面，根據複數模的定義，若把複數 x 寫成 $a+bi$ 的形式，則 $|x| = \sqrt{a^2+b^2}$，由此有 $x\overline{x} = |x|^2$。請注意若 x 是實數，則 $\overline{x} = x$。在此情況下，我們同樣有 $x\overline{x} = |x|^2$，其中 $|x|$ 代表 x 的絕對值。此一結果顯示，複數的「模」與實數的「絕對值」雖然是不同的概念，但兩者的定義相互協調，所以可以用相同的符號表示。

(iv) 對內積函數的要求，這就是為何公式 (4) 的右端須取 y_1、...、y_n 的共軛複數。舉例說，考慮 $\mathbb{C}^2$ 中的元素 $(1+2i, 3+4i)$，則 $\|(1+2i, 3+4i)\|_2 = \sqrt{(1+2i)(1-2i)+(3+4i)(3-4i)} = \sqrt{30}$。

接著討論序列空間 l^2，這個空間中的元素 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是以複數為值的序列[5]，且須滿足 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$。可以證明若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$，並且定義以下內積函數：

$$\langle (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle_3 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (5)$$

則 $\langle\ \rangle_3$ 滿足內積函數的各條公理，即 $(l^2, \langle\ \rangle_3)$ 構成內積空間。舉例說，考慮 l^2 中的元素 $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ 和 $(\frac{i}{2^n})_{n=1}^{\infty}$，它們的內積是 $\langle (\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}, (\frac{i}{2^n})_{n=1}^{\infty} \rangle_3 = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{i}{2^{2n}} = -\frac{i}{3}$。

利用上述 (2) 和 (5)，可以為 l^2 定義以下範數：

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_3 &= \sqrt{\langle (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n=1}^{\infty} \rangle_3} \\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{x_n}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

上式正好等於《數學示例：賦範空間》中的範數 $\|\ \|_3$ (即把 2 代入該網頁公式 (4) 中的 p 後所得的結果)。

接著討論函數空間 $C[a, b]$，這個空間中的元素是以閉區間 $[a, b]$ 中的實數為論元並以複數為值的連續函數。可以證明若 $f, g \in C[a, b]$，並且定義以下內積函數：

$$\langle f, g \rangle_4 = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad (6)$$

則 $\langle\ \rangle_4$ 滿足內積函數的各條公理，即 $(C[a, b], \langle\ \rangle_4)$ 構成內積空間。

舉例說，考慮 $C[0, 1]$ 中的元素 $f(x) = e^{i\pi x}$ 和 $g(x) = ie^{i2\pi x}$，那麼根據

[5]我們在《數學示例：距離空間》和《數學示例：賦範空間》中一直假設序列空間 l^{∞} 和 l^p $(1 \le p < \infty)$ 以及函數空間 $C[a, b]$ 是以實數為值，現在把這些空間的取值範圍擴大為複數。嚴格地說，我們應採用不同的符號分別代表以實數和複數為值的序列空間和函數空間，但為避免引入過多符號，這裡使用相同的符號，僅根據上下文區分以不同數域為值的序列空間和函數空間。

共軛複數的性質[6]，我們有 $\overline{g(x)} = -ie^{-i2\pi x}$，由此有 $f(x)\overline{g(x)} = -ie^{-i\pi x}$。接著應用複分析中的以下定義：設 f 為以實數為論元並以複數為值的函數，並且 f 可表達為 $u + iv$ 的形式，其中 u 和 v 為實數函數，那麼

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx \qquad (7)$$

為應用上述定義，我們首先把前面計算的 $f(x)\overline{g(x)}$ 改寫如下：

$$\begin{aligned} f(x)\overline{g(x)} &= -ie^{-i\pi x} \\ &= -i(\cos\pi x - i\sin\pi x) \\ &= -\sin\pi x - i\cos\pi x \end{aligned}$$

接著便可應用 (6) 和 (7) 進行以下計算：

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_4 &= \int_0^1 (-\sin\pi x - i\cos\pi x)\,dx \\ &= -\int_0^1 \sin\pi x\,dx - i\int_0^1 \cos\pi x\,dx \\ &= \left[\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1 - i\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

利用上述 (2) 和 (6)，可以為 $C[a, b]$ 定義以下範數：

$$\begin{aligned} \|f\|_4 &= \sqrt{\langle f, f\rangle_4} \\ &= \sqrt{\int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx} \\ &= \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

上式正好等於《數學示例：賦範空間》中的範數 $\|\ \|_5$ (即把 2 代入該網頁公式 (6) 中的 p 後所得的結果)。

前面說過，所有內積空間都是賦範空間，而我們在上面也指出了 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、l^2 和 $(C[a, b], \langle\ \rangle_4)$ 除了是內積空間外，也是賦範空間，因為它們的內積函

[6]以下用到的性質包括：$\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$，以及若 x 是實數，則 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$，因此 $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$。

數都可改寫成範數。現在的問題是，是否所有賦範空間都是內積空間？答案是否定的。某些賦範空間的範數不能由任何內積函數改寫而成，因此這些賦範空間不是內積空間。為證明這一點，須先引入以下定理。

定理 1：設 $\| \ \|$ 為根據 (2) 由某內積空間的內積函數推導而得的範數，則對該空間中任何成員 x, y，均有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (8)$$

接下來讓我們證明，l^∞ 不是內積空間，以及若 $p \neq 2$，則 $l^p\,(1 \leq p < \infty)$ 不是內積空間。根據我們在《數學示例：賦範空間》中的討論，l^∞ 下的範數是

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_5 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \qquad (9)$$

而 $l^p\,(1 \leq p < \infty)$ 下的範數則是

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_6 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (10)$$

現考慮序列 $x = (1, 1, 0, 0, \ldots)$ 和 $y = (1, -1, 0, 0, \ldots)$，並計算 $x + y = (2, 0, 0, 0, \ldots)$ 和 $x - y = (0, 2, 0, 0, \ldots)$。若 x、y、$x+y$ 和 $x-y$ 被視為 l^∞ 的成員，根據 (9)，我們有

$$\begin{aligned}
\|x\|_5 &= \sup\{|1|, |1|, |0|, |0|, \ldots\} \\
&= 1 \\
\|y\|_5 &= \sup\{|1|, |-1|, |0|, |0|, \ldots\} \\
&= 1 \\
\|x+y\|_5 &= \sup\{|2|, |0|, |0|, |0|, \ldots\} \\
&= 2 \\
\|x-y\|_5 &= \sup\{|0|, |2|, |0|, |0|, \ldots\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

由此得 $\|x+y\|_5{}^2 + \|x-y\|_5{}^2 = 8$，而 $2(\|x\|_5{}^2 + \|y\|_5{}^2) = 4$，即等式 (8) 不成立，由此根據「定理 1」，可知 $\| \ \|_5$ 不能由任何內積空間的內積函數推導而得，因此 l^∞ 不是內積空間 (儘管它是賦範空間)。

若 x、y、$x+y$ 和 $x-y$ 被視為 $l^p\,(1 \leq p < \infty)$ 的成員，根據 (10)，我們有

$$\begin{aligned}
\|x\|_6 &= (|1|^p + |1|^p + |0|^p + |0|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|y\|_6 &= (|1|^p + |-1|^p + |0|^p + |0|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \\
\|x+y\|_6 &= (|2|^p + |0|^p + |0|^p + |0|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2 \\
\|x-y\|_6 &= (|0|^p + |2|^p + |0|^p + |0|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

由此得 $\|x+y\|_6{}^2 + \|x-y\|_6{}^2 = 8$，而 $2(\|x\|_6{}^2 + \|y\|_6{}^2) = 2^{2+\frac{2}{p}}$。由此可見，只有當 $p = 2$ 時，等式 (8) 才成立，由此根據「定理 1」，可知若 $p \neq 2$，$\| \, \|_6$ 不能由任何內積空間的內積函數推導而得，因此 l^p 不是內積空間 (儘管它是賦範空間)。

最後讓我們證明 $(C[a,b], \| \, \|_7)$ 不是內積空間，其中

$$
\|f\|_7 = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad (11)
$$

考慮 $C[a,b]$ 中的兩個元素 $f(x) = 1$ 和 $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$，並計算 $(f+g)(x) = 1 + \frac{x-a}{b-a}$ 和 $(f-g)(x) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$。根據 (11)，我們有

$$
\begin{aligned}
\|f\|_7 &= \max_{x \in [a,b]} |1| \\
&= 1 \\
\|g\|_7 &= \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{x-a}{b-a} \right| \\
&= 1 \\
\|f+g\|_7 &= \max_{x \in [a,b]} \left| 1 + \frac{x-a}{b-a} \right| \\
&= 2 \\
\|f-g\|_7 &= \max_{x \in [a,b]} \left| 1 - \frac{x-a}{b-a} \right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

由此得 $\|f+g\|_7{}^2 + \|f-g\|_7{}^2 = 5$，而 $2(\|f\|_7{}^2 + \|g\|_7{}^2) = 4$，即等式 (8) 不成立，由此根據「定理 1」，可知 $\| \, \|_7$ 不能由任何內積空間的內積函數推導而得，因此 $(C[a,b], \| \, \|_7)$ 不是內積空間 (儘管它是賦範空間)。

連結至數學專題
連結至周家發網頁