數學示例：積分與和分

我們在《數學示例：微分與差分》中介紹了「微分學」和「差分學」的基本概念，本文主旨是介紹與這兩個學科分別對應的積分學(Integral Calculus)和和分學(Sum Calculus) 的基本概念。正如微分學與積分學可合稱為微積分學(Differential and Integral Calculus)，差分學與和分學也可合稱為差和分學(Difference and Sum Calculus)。

先從「積分」說起，此一概念又可細分為「不定積分」和「定積分」這兩個子概念，這裡首先介紹前者。簡言之，不定積分(indefinite integral) 就是導數算子 D 的逆算子，因此又稱為「反導數」(anti-derivative) 算子，以下把這個算子記作 $\int$ (有些書也記作 D^{-1})。根據此一定義，設 f 為以 x 作為變項的函數，則 $\int f$ 就是以 x 作為變項的另一函數 F，使得

$$DF(x) = f(x) \qquad (1)$$

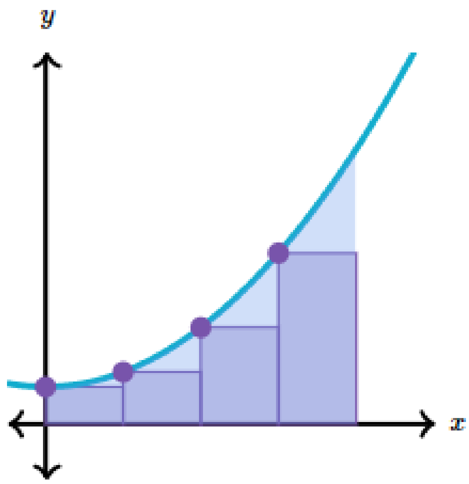
在上式中，F 也稱為 f 的「原函數」(primitive function)。學過數學分析的讀者都應知道，不定積分運算的結果並不唯一，這是因為如果函數 F 滿足 (1)，那麼 $F + c$，其中 c 是任意常數 (也可看成一個常值函數，即對任何 x 都有 $c(x) = c$ 的函數)，也滿足 (1)。舉例說，設

$$f(x) = 5^x \qquad (2)$$

那麼讀者可自行驗證，$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$ 滿足 $DF(x) = f(x)$。不僅如此，$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 1$、$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - \sqrt{2}$、$F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + \pi$、…，也滿足 $DF(x) = f(x)$，因此在數學分析中，一般把上述結果寫成以下形式：

$$\int 5^x = \frac{5^x}{\ln 5} + c \qquad (3)$$

定積分(definite integral) 則是一種求極限運算，可用來求面積。設 f 為在閉區間 $[a, b]$ 內有定義的連續一元函數，這個函數在平面上的圖象呈現為一條曲線。假設在上述區間內，$f(x) \geq 0$，現欲求這條曲線、x 軸、$x = a$ 直線和 $x = b$ 直線所圍封範圍 (即下圖所示曲邊平面，下圖把 a 設定為 0) 的面積：



現把 $[a, b]$ 等分為 n 個子區間，每個子區間的長度為 $h = \frac{b-a}{n}$，而這些子區間的左端點則為 a、$a+h$、...、$a+(n-1)h$，這些左端點的函數值 $f(a)$、$f(a+h)$、...、$f(a+(n-1)h)$ 就是上圖中各個紫色點的 y 坐標。把這些函數值乘以 h 所得結果，即 $f(a)h$、$f(a+h)h$、...、$f(a+(n-1)h)h$ 等於上圖中紫色長方形的面積。如果把這些長方形面積加起來，所得總面積可被看成上圖中曲邊平面面積的近似值，我們把這個近似值寫成下式：

$$S(f, a, b, n) = f(a)h + f(a+h)h + \ldots + f(a+(n-1)h)h \qquad (4)$$

在數學分析中，上式稱為「左黎曼和」(Riemann left sum)[1]。由於上式依賴於 f、a、b 和 n，所以記作 $S(f, a, b, n)$ 的形式。現在如果把 n 不斷增大 (亦即把 h 不斷縮小)，上述的 $S(f, a, b, n)$ 便會越來越逼近上圖中曲邊平面的面積，我們把這個極限值稱為「f 由 a 到 b 的定積分」，以下記作 $\int_a^b f$，即

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} S(f, a, b, n) \qquad (5)$$

從以上介紹可見，不定積分和定積分是很不同的概念，儘管兩者都跟導數運算存在一些關連：前者是導數的逆運算，其運算結果並不唯一；後者則是某個乘法連加法運算的極限值，有唯一的運算結果 (請注意導數則是某個減法連除法運算的極限值)。但有趣的是，這兩種積分卻可聯繫起來，這是以下定理的內容[2]。

[1]以下介紹的定積分定義是一種建基於「左黎曼和」的定義，請注意在數學分析中，還有建基於其他黎曼和的定積分定義，這裡為了方便與下文將要介紹的內容作比較，所以採用「左黎曼和」這個概念。

[2]某些書把「定理 1」稱為「微積分第二基本定理」。

定理 1 (微積分基本定理Fundamental Theorem of Differential and Integral Calculus)：設 f、a、b 如上定義，則

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b \qquad (6)$$

其中若 F 為在 a 和 b 點處有定義的一元實值函數，則

$$[F]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

請注意在 (6) 中，$\int_a^b f$ 代表定積分，而 $\int f$ 則代表不定積分。

「定理 1」告訴我們，為求函數 f 由 a 到 b 的定積分，可以無需求 f 的左黎曼和的極限值，而只需求 f 的不定積分於 a 和 b 點處的值之差，這樣便使求某些曲線下面積的運算變得很便捷。舉例說，如要求 (2) 中函數 f 所代表曲線，x 軸、$x = 3$ 和 $x = 3.08$ 所圍封範圍的面積，無需運用定義 (4) 和 (5)，而只需應用 (3) 所示的不定積分結果以及「定理 1」，從而求得 (在以下計算中，c 被處理成常值函數，故有 $c(3.08) = c(3))$：

$$\begin{aligned}
\int_3^{3.08} 5^x &= \left[\int 5^x\right]_3^{3.08} \\
&= \left[\frac{5^x}{\ln 5} + c(x)\right]_3^{3.08} \\
&= \frac{5^{3.08}}{\ln 5} + c(3.08) - \left(\frac{5^3}{\ln 5} + c(3)\right) \\
&\approx 10.6723177 \qquad (8)
\end{aligned}$$

上述計算結果顯示，儘管不定積分運算的結果涉及一個任意常值函數 $c(x)$，但由於這個常值函數的值會在計算過程中抵消掉，因此不影響定積分的計算結果，而定積分具有唯一運算結果。

跟「積分」類似，「和分」也可細分為「不定和分」和「定和分」這兩個子概念，這裡首先介紹前者。簡言之，不定和分(indefinite sum) 就是差分算子 Δ 的逆算子，因此又稱為「反差分」(anti-difference) 算子，以下把這個算子記作 $\sum$ (有些書也記作 Δ^{-1})。根據此一定義，設 f 為以 x 作為變項的函數，則 $\sum f$ 就是以 x 作為變項的另一函數 F，使得

$$\Delta F(x) = f(x) \qquad (9)$$

跟不定積分的情況相似，不定和分運算的結果也並不唯一，這是因為如果函數 F 滿足 (9)，那麼 $F + p$，其中 p 是任意帶有周期 h 的「周期函數」

(periodic function)，即對任何 x 皆滿足 $p(x+h)=p(x)$ 的函數，也滿足 (9)。舉例說，設

$$f(x)=x \qquad (10)$$

那麼 $F(x)=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}$ 滿足 $\Delta F(x)=f(x)$。不僅如此，$F(x)=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+1$ [3]、$F(x)=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+\sin(\frac{2\pi x}{h})$、$F(x)=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+\tan(\frac{\pi x}{h})$、...，也滿足 $\Delta F(x)=f(x)$。以下讓我們驗證 $\Delta(\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+\tan(\frac{\pi x}{h}))=x$ (以下要應用 $\tan(x+\pi)=\tan x$ 此一事實)：

$$\begin{aligned}
& \Delta\left(\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+\tan\left(\frac{\pi x}{h}\right)\right) \\
= & \frac{(x+h)^2}{2h}-\frac{x+h}{2}+\tan\left(\frac{\pi(x+h)}{h}\right)-\left(\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+\tan\left(\frac{\pi x}{h}\right)\right) \\
= & \frac{x^2}{2h}+x+\frac{h}{2}-\frac{x}{2}-\frac{h}{2}+\tan\left(\frac{\pi x}{h}+\pi\right)-\frac{x^2}{2h}+\frac{x}{2}-\tan\left(\frac{\pi x}{h}\right) \\
= & x
\end{aligned}$$

因此可以把上述結果寫成以下形式：

$$\sum x=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2}+p(x) \qquad (11)$$

定和分(definite sum) 則是一種求和運算，設 f 為在 a、$a+h$、...、$a+(n-1)h$ 點處有定義的函數，則「f 由 a 到 $a+(n-1)h$ 的定和分」，以下記作 $\sum_a^{a+(n-1)h} f$ 定義如下[4]：

$$\sum_a^{a+(n-1)h} f=f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h) \qquad (12)$$

比較上式與 (4)，可以看到 (4) 所示的「左黎曼和」其實是把上式乘以 h 的結果。

從以上介紹可見，不定和分和定和分是很不同的概念，儘管兩者都跟差分運算存在一些關連：前者是差分的逆運算，其運算結果並不唯一；後者則是某個加法運算的結果，有唯一的運算結果 (請注意差分則是某個減法運

[3] 請注意任何常數函數 c 都是周期函數，因為 c 滿足 $c(x+h)=c=c(x)$。

[4] (12) 是對傳統「求和符號」(summation notation) 表示法的推廣，如用傳統表示法，(12) 等號左端的式子應改寫為下式：

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$$

算的結果)。有趣的是，這兩種和分也可通過某個類似「定理 1」的基本定理聯繫起來，這是以下定理的內容。

定理 2 (差和分基本定理Fundamental Theorem of Difference and Sum Calculus)：設 f、a、n、h 如上定義，則

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h} f = \left[\sum f\right]_a^{a+nh} \qquad (13)$$

請注意在 (13) 中，$\sum_a^{a+(n-1)h} f$ 代表定和分，而 $\sum f$ 則代表不定和分，另請注意上式左右兩端上限的差別。

「定理 2」告訴我們，為求函數 f 由 a 到 $a+(n-1)h$ 的定和分，只需求 f 的不定和分於 a 和 $a+nh$ 點處的值之差，這樣便使某些求和運算變得很便捷。舉例說，考慮「算術級數」(arithmetic series) $a+(a+h)+\ldots+(a+(n-1)h)$，我們在中學時都學過以下算術級數公式：

$$a+(a+h)+\ldots+(a+(n-1)h) = \frac{n(2a+(n-1)h)}{2} \qquad (14)$$

現在讓我們用「定理 2」推導此公式。由於上式左端等於 $\sum_a^{a+(n-1)h} x$，我們可以把 (11) 所得的結果套用於「定理 2」，從而求得 (在以下計算中，要應用 p 作為周期函數的以下性質：$p(a+nh) = p(a+(n-1)h) = \ldots = p(a+h) = p(a)$)：

$$\begin{aligned}
\sum_{a}^{a+(n-1)h} x &= \left[\sum x\right]_a^{a+nh} \\
&= \left[\frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2} + p(x)\right]_a^{a+nh} \\
&= \frac{(a+nh)^2}{2h} - \frac{a+nh}{2} + p(a+nh) - \left(\frac{a^2}{2h} - \frac{a}{2} + p(a)\right) \\
&= \frac{a^2+2anh+n^2h^2-ah-nh^2-a^2+ah}{2h} + p(a+nh) - p(a) \\
&= \frac{n(2a+(n-1)h)}{2} \qquad (15)
\end{aligned}$$

上述計算結果跟 (14) 完全相同。

至此介紹了 $\int$、$\int_a^b$、Σ 和 $\Sigma_a^{a+(n-1)h}$ 這四個算子，它們都具有線性性質，此即以下定理的內容 (以下定理跟《數學示例：微分與差分》中的「定理 1」

非常相似)。

定理 3：設 ϕ 為 $\int$、$\int_a^b$、Σ 和 $\Sigma_a^{a+(n-1)h}$ 中的任意一個，f、g 為函數，c 為實數，則

(i) $\phi(f+g)=\phi f+\phi g$

(ii) $\phi(cf)=c\phi f$

舉例說，從 (11) 容易求得

$$\begin{aligned}\sum(2x) &= 2\sum x \\ &= \frac{x^2}{h}-x+2p(x)\end{aligned}$$

由於 p 是以 h 為周期的函數，容易看到 $2p$ 也是以 h 為周期的函數。由於 p 具有任意性，$2p$ 也具有任意性，因此可以用另一個代表任意帶有周期 h 的周期函數的符號 q 來取代上述結果中的 $2p$，從而得到

$$\sum(2x)=\frac{x^2}{h}-x+q(x) \qquad (16)$$

接下來介紹和分學的一項應用－求定積分的近似值，為此須先引入逆向差分(backward difference) 算子。設 f 為函數，h 為給定實數，則 f 的逆向差分，以下記作 ∇f，也是一個函數，其定義如下：

$$\nabla f(x)=f(x)-f(x-h) \qquad (17)$$

此外，還需要逆移位(inverse shift) 算子，此即移位算子 E 的逆運算，以下記作 E^{-1}，其定義如下：

$$E^{-1}f(x)=f(x-h) \qquad (18)$$

請把以上兩個定義與《數學示例：微分與差分》中差分算子 Δ[5]的定義 (3) 和移位算子 E 的定義 (4) 比較。正如 Δ 與 E 存在以下關係 (下式等於上述網頁的 (6)，其中 I 代表恆等算子)：

$$\Delta=E-I \qquad (19)$$

比較 (17) 和 (18)，也可得到 ∇ 與 E^{-1} 的關係如下：

$$\nabla=I-E^{-1} \qquad (20)$$

[5]為與 ∇ 作明確區分，Δ 也可稱為「前向差分」(forward difference) 算子。

從以上兩式可以分別得到 $E = I + \Delta$ 和 $E^{-1} = I - \nabla$。由此可得以下關係：

$$I + \Delta = (I - \nabla)^{-1} \qquad (21)$$

我們還可以證明 ∇ 和 E^{-1} 都具有線性性質，而且對任何函數 $f(x)$，都有

$$\nabla^n f(x) = E^{-n}(\Delta^n f(x)) = \Delta^n(E^{-n} f(x))$$

其中 n 為自然數，並且 E^{-n} 代表 $(E^{-1})^n$。由於在算子代數中，可以把算子的複合表示成算子之間的乘法，以上結果可以表示成

$$\nabla^n = E^{-n}\Delta^n = \Delta^n E^{-n} \qquad (22)$$

上式顯示 E^{-n} 與 Δ^n 具有交換性。此外，由於在算子代數中，可以把逆算子表示成「倒數」(reciprocal) 形式，因此上式也可改寫成

$$\nabla^n = \frac{\Delta^n}{E^n} \qquad (23)$$

此外，我們還需要把 $\frac{1}{\ln(1+x)}$ 展開成級數。根據《數學示例：微分與差分》中的 (24)，我們有 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$，由此運用長除法，可以求得

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
\multicolumn{1}{r}{} & \frac{1}{x} & + & \frac{1}{2} & - & \frac{x}{12} & + & \frac{x^2}{24} & - & \frac{19x^3}{720} & + & \ldots \\ \cline{2-12}
x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots & 1 & & & & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & 1 & - & \frac{x}{2} & + & \frac{x^2}{3} & - & \frac{x^3}{4} & + & \frac{x^4}{5} & & \ldots \\ \cline{2-12}
\multicolumn{1}{r}{} & & & \frac{x}{2} & - & \frac{x^2}{3} & + & \frac{x^3}{4} & - & \frac{x^4}{5} & & \ldots \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & \frac{x}{2} & - & \frac{x^2}{4} & + & \frac{x^3}{6} & - & \frac{x^4}{8} & & \ldots \\ \cline{4-12}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & - & \frac{x^2}{12} & + & \frac{x^3}{12} & - & \frac{3x^4}{40} & & \ldots \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & - & \frac{x^2}{12} & + & \frac{x^3}{24} & - & \frac{x^4}{36} & & \ldots \\ \cline{5-12}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & \frac{x^3}{24} & - & \frac{17x^4}{360} & & \ldots \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & \frac{x^3}{24} & - & \frac{x^4}{48} & & \ldots \\ \cline{8-12}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & & - & \frac{19x^4}{720} & & \ldots \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & & - & \frac{19x^4}{720} & & \ldots \\ \cline{9-12}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & & & & & \ldots
\end{array}$$

以上計算顯示

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{19x^3}{720} + \ldots \qquad (24)$$

現在運用上述概念推導一條求定積分近似值的公式。設我們要求 $\int_a^{a+nh} f$，那麼根據「定理 1」，我們有 (以下把不定積分算子 $\int$ 寫成 D^{-1})：

$$\begin{aligned}\int_a^{a+nh} f &= [D^{-1}f]_a^{a+nh} \\ &= D^{-1}f(a+nh) - D^{-1}f(a) \qquad (25)\end{aligned}$$

接下來要代入 D^{-1} 的表達式，這有兩條表達式。首先，根據《數學示例：微分與差分》中的 (28)，由於 $D = \frac{\ln(I+\Delta)}{h}$，故有

$$D^{-1} = \frac{h}{\ln(I+\Delta)} \qquad (26)$$

其次，利用 (21) 和對數函數的性質，又有

$$\begin{aligned}D^{-1} &= \frac{h}{\ln((I-\nabla)^{-1})} \\ &= -\frac{h}{\ln(I-\nabla)} \qquad (27)\end{aligned}$$

接著把 (27) 和 (26) 分別代入 (25) 中的第一和第二個 D^{-1}，然後用 (24) 把所得結果改寫，可得到

$$\begin{aligned}\int_a^{a+nh} f &= -\frac{h}{\ln(I-\nabla)}f(a+nh) - \frac{h}{\ln(I+\Delta)}f(a) \\ &= \left(\frac{h}{\nabla} - \frac{h}{2} - \frac{h\nabla}{12} - \frac{h\nabla^2}{24} - \frac{19h\nabla^3}{720} - \ldots\right)f(a+nh) \\ &\quad - \left(\frac{h}{\Delta} + \frac{h}{2} - \frac{h\Delta}{12} + \frac{h\Delta^2}{24} - \frac{19h\Delta^3}{720} + \ldots\right)f(a) \qquad (28)\end{aligned}$$

在展開上式時，會出現 $\frac{h}{\nabla}f(a+nh) - \frac{h}{\Delta}f(a)$ 這樣的項。由於這涉及 ∇^{-1} 和 Δ^{-1}，這會為計算造成困難。為解決上述困難，我們可以運用 (23)、(19) 以及 $f(a+nh) = E^n f(a)$ 此一事實把此項改寫如下：

$$\begin{aligned}\frac{h}{\nabla}f(a+nh) - \frac{h}{\Delta}f(a) &= \frac{hE}{\Delta}E^n f(a) - \frac{h}{\Delta}f(a) \\ &= \frac{E^{n+1}-I}{E-I}hf(a) \\ &= (I + E + \ldots + E^{n-1} + E^n)hf(a) \qquad (29)\end{aligned}$$

上面最後一行可用長除法計算而得，也可從以下一般事實而得：由於 $(x-1)(1+x+\ldots+x^{n-1}+x^n) = x^{n+1}-1$, 故有 $\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 1+x+\ldots+x^{n-1}+x^n$。

把 (29) 代入 (28) 並加以整理，便可得到以下格雷戈里公式(Gregory formula)：

$$\int_a^{a+nh} f = h\left(\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)+\frac{f(a+nh)}{2}\right)$$
$$-\frac{h}{12}(\nabla f(a+nh)-\Delta f(a))-\frac{h}{24}(\nabla^2 f(a+nh)+\Delta^2 f(a))$$
$$-\frac{19h}{720}(\nabla^3 f(a+nh)-\Delta^3 f(a))+\ldots \qquad (30)$$

請注意上式的第一行等於求定積分的「複合梯形公式」(composite trapezoidal rule)，因此上式的第二、三行可被視為對複合梯形公式結果的修正。

現在讓我們沿用 (2) 中的 $f(x)$，並在設定 $h=0.02$ 的情況下求 $\int_3^{3.08} f(x)$ 的近似值，為此要計算一系列 $f(x)$ 以及 $\nabla^i f(a+nh)$ 和 $\Delta^i f(a)$ (其中 $i=1,2,3,\ldots$) 的值。我們可以運用《數學示例：微分與差分》中用過的差分表，現把該表複製如下：

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
3	125	4.089052	0.133763	0.004376	0.000143
3.02	129.089053	4.222815	0.138139	0.004519	—
3.04	133.311868	4.360954	0.142657	—	—
3.06	137.672822	4.503611	—	—	—
3.08	142.176433	—	—	—	—

從上表可以馬上讀取以下數據：$f(3)=125, f(3.02)\approx 129.089053, f(3.04)\approx 133.311868$，$f(3.06)\approx 137.672822$，$f(3.08)\approx 142.176433$，$\Delta f(3)\approx 4.089052$，$\Delta^2 f(3)\approx 0.133763$ 和 $\Delta^3 f(3)\approx 0.004376$。此外，還可利用 (22) 求

$$\nabla f(3.08)=\Delta E^{-1} f(3.08)=\Delta f(3.06)\approx 4.503611$$
$$\nabla^2 f(3.08)=\Delta^2 E^{-2} f(3.08)=\Delta^2 f(3.04)\approx 0.142657$$
$$\nabla^3 f(3.08)=\Delta^3 E^{-3} f(3.08)=\Delta^3 f(3.02)\approx 0.004519$$

首先用複合梯形公式求初步的近似值，即把 $f(x)=5^x$、$a=3$、$h=0.02$ 和 $n=4$ 代入 (30) 的第一行：

$$\int_3^{3.08} 5^x \approx 0.02\times\left(\frac{f(3)}{2}+f(3.02)+f(3.04)+f(3.06)+\frac{f(3.08)}{2}\right)$$
$$\approx 0.02\times\left(\frac{125}{2}+129.089053+133.311868+137.672822+\frac{142.176433}{2}\right)$$
$$\approx 10.673239 \qquad (31)$$

把上述結果與 (8) 比較，可以看到運用複合梯形公式求 $\int_3^{3.08} 5^x$，所得結果已準確至小數點後 2 位。接著用 (30) 的第二、三行修正上述結果如下：

$$
\begin{aligned}
\int_3^{3.08} 5^x &\approx 10.673239 - \frac{0.02}{12} \times (\nabla f(3.08) - \Delta f(3)) - \frac{0.02}{24} \times (\nabla^2 f(3.08) + \Delta^2 f(3)) \\
&\quad - \frac{19 \times 0.02}{720} \times (\nabla^3 f(3.08) - \Delta^3 f(3)) \\
&\approx 10.673239 - \frac{0.02}{12} \times (4.503611 - 4.089052) - \frac{0.02}{24} \times (0.142657 + 0.133763) \\
&\quad - \frac{19 \times 0.02}{720} \times (0.004519 - 0.004376) \\
&\approx 10.672318 \qquad (32)
\end{aligned}
$$

把上述結果與 (8) 比較，可以看到運用 (30) 求 $\int_3^{3.08} 5^x$，所得結果準確至小數點後 6 位。

以上討論的 $f(x)$ 只是用來示範如何應用格雷戈里公式求定積分的近似值，對於像 $f(x)$ 這樣簡單的函數，採用數學分析中的方法直接計算其定積分，顯然比應用格雷戈里公式更為快捷和準確。不過，如果有關函數難以用數學分析的方法求定積分，或者只有該函數的部分離散值而不知道函數的公式，便只能應用數值方法求定積分的近似值，而格雷戈里公式是眾多可供選擇的方法之一。

連結至數學專題
連結至周家發網頁