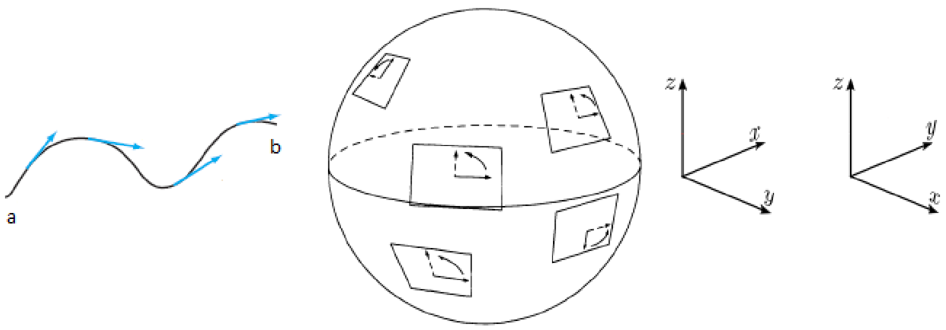
數學示例：微分形式的積分

「微分」和「積分」是數學分析中的重要運算，「數學分析」的別名「微積分」就是由這兩種運算的名稱組合而成。我們在《數學示例：外導數》中介紹了微分形式的微分 (亦即外導數) 運算，本文主旨是介紹微分形式的積分運算。跟外導數運算相似，本文介紹的積分運算也是以微分形式作為輸入，但其輸出卻是實數而非微分形式，因此這種積分運算對應於數學分析中的「定積分」(definite integral) 而非「不定積分」(indefinite integral)。

由於微分形式的積分涉及定向(orientation) 的概念，因此以下先對低維度 (0 維至 3 維) 流形的定向作出直觀簡介。請注意並非所有流形都有定向，我們把有定向的流形稱為可定向(orientable) 流形，否則稱為不可定向(non-orientable) 流形。為簡化討論，以下只討論可定向流形，因此以下凡提到「流形」，都是指「可定向流形」。

以下讀者將會看到，每一個 n $(0 \leq n \leq 3)$ 維流形都有兩種可能定向，其中一個是 $\mathbb{R}^n$ 空間的標準定向(standard orientation)，另一個則是非標準定向(non-standard orientation)。0 維流形是指由單個的點組成的集合，這種流形的定向是指派給這些點的 $+$ 號或 $-$ 號，其中 $+$ 號是 $\mathbb{R}^0$ 的標準定向，這裡 $\mathbb{R}^0$ 是僅由 0 這一點組成的集合。

接下來會借助下圖介紹 1 至 3 維流形的定向：



1 維流形的定向是指沿著該流形在任意兩定點 (設為 a 和 b，這兩點不一定

是流形的端點) 之間流動的兩個可能方向：從 a 流向 b 或從 b 流向 a。1 維流形上的每一點處都有一個切空間 (即切線)，這個切空間的基底是該點處的單位切向量，而這個切向量的指向正可反映流形的定向。以上面左圖為例，該圖展示一條曲線及其上四點處的基底，這些基底顯示這條曲線的定向是從 a 流向 b (而非相反)。$\mathbb{R}^1$ 的標準定向是向右方向 (即從較小的實數流向較大的實數)。

2 維流形的定向是指逆時針／順時針方向。2 維流形上的每一點處都有一個切空間，這個切空間的基底是兩個互相垂直的單位切向量 (以下稱為 x 和 y)，而把 x 旋轉至 y 的方向正可反映流形的定向。以上面中圖為例，該圖展示一個曲面及其上五點處的基底 (其中 x 和 y 分別用實線和虛線箭頭表示)，這些基底顯示這個曲面的定向是逆時針方向。$\mathbb{R}^2$ 的標準定向是逆時針方向。

3 維流形的定向是指右手性／左手性方向。3 維流形上的每一點處都有一個切空間，這個切空間的基底是三個互相垂直的單位切向量 (以下稱為 x、y 和 z)，而這些切向量在空間上的排佈正可反映流形的定向。上面右圖展示了兩組基底，其中左面的一組呈左手性方向，右面的一組則呈右手性方向。$\mathbb{R}^3$ 的標準定向是右手性方向。

接著便可開始介紹微分形式的積分，這類積分具有以下一般形式：

$$\int_R \alpha \qquad (1)$$

上式由三部分組成：(i) 積分符號 $\int$；(ii) k 維積分範圍 R，這是某個帶有定向的 k 維流形；(iii) 被積的微分 k 形式 α。請注意這裡 R 必須帶有定向，而且其維度必須與 α 的維度一致，即都等於 k。

接下來介紹如何計算 (1)。首先考慮最簡單 (即 $k = 0$) 的情況，在此情況下，積分範圍 R 是由單個的點組成的集合，設為 $\{p\}$；微分 0 形式 α 是 R 上實值函數，以下記作 f；而上述積分定義如下：

$$\int_{\{p\}} f = \begin{cases} f(p), & \text{若 } p \text{ 的定向是 } + \\ -f(p), & \text{若 } p \text{ 的定向是 } - \end{cases} \qquad (2)$$

上式的意思是說，在 $\{p\}$ 上對 f 進行積分，等於把函數 f 作用於 p，並按 p 的定向乘以 ± 1。舉例說，若有

$$f_I(x) = x + 2 \qquad (3)$$

並且 0 這一點被指派定向 $-$，那麼根據上式第二行，我們有

$$\int_{\{0\}} f_I = -f_1(0) = -2$$

若 $k>0$，又可區分兩種情況。較簡單的情況是積分範圍 R 是 $\mathbb{R}^k$ 空間中的 k 維流形，例如 $\mathbb{R}$ 中的區間、$\mathbb{R}^2$ 中的平面圖形等。在此情況下，設微分 k 形式 α 具有 $f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$ 的形式；而上述積分定義如下：

$$\begin{aligned}&\int_R f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k\\ = &\begin{cases}\int\ldots\int_{|R|} f(x_1,\ldots,x_k)d(x_1,\ldots,x_k), & \text{若 } R \text{ 取標準定向}\\ -\int\ldots\int_{|R|} f(x_1,\ldots,x_k)d(x_1,\ldots,x_k), & \text{若 } R \text{ 取非標準定向}\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

上式等號左端代表微分 k 形式的積分，右端則代表普通的 (多重) 積分，其中 $|R|$ 代表把 R 的定向定為標準定向。上式的意思是說，在 R 上對上述微分 k 形式進行積分，只需把 $f(x_1,\ldots,x_k)$ 當作普通積分中的「被積函數」，並把 $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$ 視作等同普通積分中的符號 $d(x_1,\ldots,x_k)$，然後運用數學分析的傳統方法計算 $f(x_1,\ldots,x_k)$ 在 $|R|$ 上的普通積分，並按 R 的定向乘以 ±1。舉例說，考慮 $\mathbb{R}^2$ 空間中的 2 維流形 $R_{II}=[0,1]\times[0,2]$ (以逆時針方向為定向) 和微分 2 形式

$$\alpha_{II}=x_1x_2dx_1\wedge dx_2 \tag{5}$$

由於 R_{II} 取標準定向，我們應用上式第一行計算如下 (請注意在計算以下的迭代積分時要小心處理積分的上、下限)：

$$\begin{aligned}\int_{R_{II}}\alpha_{II} &= \iint_{[0,1]\times[0,2]} x_1x_2d(x_1,x_2)\\ &= \int_0^2\int_0^1 x_1x_2dx_1dx_2\\ &= 1\end{aligned}$$

較複雜的情況則是積分範圍 R 是被嵌入到比其維度高的空間中的流形，例如 $\mathbb{R}^2$ 中的斜線、曲線和 $\mathbb{R}^3$ 中的斜面、曲面等。在此情況下，我們要為 R 確定一個適當的參數化形式，這實質上涉及變項變換(change of variables) 的過程 (詳見下文的例子)。變項變換又稱「坐標變換」(change of coordinates)，就是把某流形上的點從某一坐標系下的坐標變換成另一坐標系下的坐標。一般的變項變換可表示成如下所示的函數 (下式等於《數學示例：前推與拉回》中的 (3))：

$$\begin{aligned}\psi: M\to N;\quad &\psi(y_1,\ldots,y_m)=(x_1,\ldots,x_n),\ \text{其中}\\ &x_1=x_1(y_1,\ldots,y_m),\ \ldots,\ x_n=x_n(y_1,\ldots,y_m)\end{aligned} \tag{6}$$

上述函數的作用是把 m 維空間 M (定義域) 中的 $(y_1,\ldots,y_m)$ 坐標變換成 n 維空間 N (對應域) 中的 $(x_1,\ldots,x_n)$ 坐標。若 M 與 N 的定向能互相協

調，那麼 ψ 是保向(orientation-preserving) 的，否則 ψ 是逆向(orientation-reversing) 的。

現設有 N 上的 k 維流形 R、N 上的微分 k 形式 α，以及 (6) 所示的變項變換函數 ψ，我們有以下求積分公式：

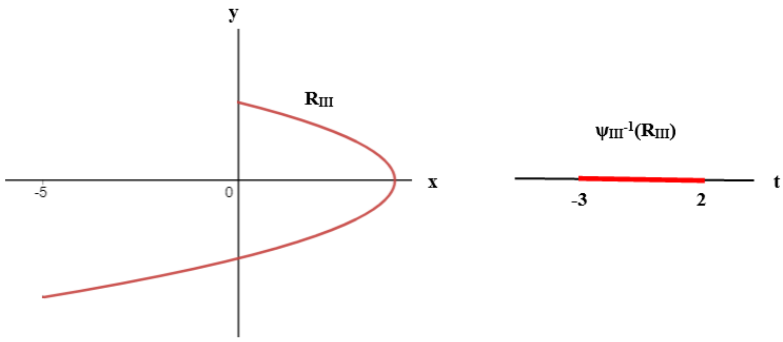
$$\int_R \alpha = \begin{cases} \int_{\psi^{-1}(R)} \psi^*\alpha, & \text{若 } \psi \text{ 是保向的} \\ -\int_{\psi^{-1}(R)} \psi^*\alpha, & \text{若 } \psi \text{ 是逆向的} \end{cases} \qquad (7)$$

上式的作用是把 N 上的積分變換成 M 上的積分，具體地說，包含兩方面的變換。首先，積分範圍從 R 變換成 $\psi^{-1}(R)$，其中 R 是 N 上的 k 維流形，$\psi^{-1}(R)$ 則是 M 上的 k 維流形。其次，被積的微分 k 形式從 α 變換成 $\psi^*\alpha$。這裡 ψ^* 代表函數 ψ 的「拉回」。根據《數學示例：前推與拉回》中的介紹，若 α 是 $\Gamma(\bigwedge^k T^*N)$ 中的微分 k 形式,則 $\psi^*\alpha$ 是 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 中的微分 k 形式。

首先提供微分 1 形式的積分的例子，考慮以下微分 1 形式：

$$\alpha_{III} = y^2 dx + x dy \qquad (8)$$

積分範圍 R_{III} 則是如下面左圖所示的拋物線 $x = 4 - y^2$ 從 $(-5, -3)$ 點到 $(0, 2)$ 點的一段，這是一個被嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中的 1 維流形：



以下是 R_{III} 的一個參數化形式[1]：

$$\psi_{III} : [-3, 2] \to R_{III}; \;\; \psi_{III}(t) = (x, y), \text{ 其中} x = 4 - t^2, \; y = t \qquad (9)$$

為用 (7) 求 $\int_{R_{III}} \alpha_{III}$，我們進行前述的兩方面變換。首先，讀者可自行驗證，

$$\psi_{III}{}^{-1}(R_{III}) = [-3, 2] \qquad (10)$$

此即上面右圖所示實數線上的一段。此外，由於前面規定了 R_{III} 的方向是從 $(-5, -3)$ 點流向 $(0, 2)$ 點，$\psi_{III}{}^{-1}(R_{III})$ 則取標準定向，即從較小的

[1] 可以證明，對微分形式進行積分運算的結果並不依賴於被積範圍的參數化形式。

實數 -3 流向較大的實數 2，而 -3 和 2 正好分別等於 ${\psi_{III}}^{-1}(-5,-3)$ 和 ${\psi_{III}}^{-1}(0,2)$，因此 ${\psi_{III}}^{-1}(R_{III})$ 與 R_{III} 的定向互相協調，由此可知 ψ_{III} 是保向的。

其次求 $(\psi_{III})^*\alpha_{III}$。沿用《數學示例：前推與拉回》介紹的「代入法」，先從 (9) 求得：

$$dx = -2tdt, \quad dy = dt \qquad (11)$$

把 (9) 和 (11) 代入 (8) 等號右端中的 x、y、dx 和 dy，便可求得

$$\begin{aligned} (\psi_{III})^*\alpha_{III} &= t^2(-2tdt) + (4-t^2)dt \\ &= (-2t^3 - t^2 + 4)dt \qquad (12) \end{aligned}$$

接著把 (10) 和 (12) 代入 (7) 的第一行的右端 (因為 ψ_{III} 是保向的)：

$$\int_{R_{III}} \alpha_{III} = \int_{[-3,2]} (-2t^3 - t^2 + 4)dt$$

至此我們把積分 $\int_{R_{III}} \alpha_{III}$ 轉化成較簡單的積分，這個積分的積分範圍 $[-3,2]$ 是 $\mathbb{R}$ 空間中的 1 維流形 (而非被嵌入到較高維空間中的 1 維流形)，因此可以運用 (4) 的第一行求這個積分。由於 $\int_{-3}^{2}(-2t^3 - t^2 + 4)dt = \frac{245}{6}$，故有

$$\int_{R_{III}} \alpha_{III} = \frac{245}{6} \qquad (13)$$

其次提供微分 2 形式的積分的例子，考慮以下微分 2 形式：

$$\alpha_{IV} = z^2 dx \wedge dy \qquad (14)$$

積分範圍 R_{IV} 則是單位北半球面，這是一個被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 維流形，以下是 R_{IV} 的一個參數化形式：

$$\begin{aligned} \psi_{IV} &: [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R_{IV}; \\ \psi_{IV}(s,t) &= (x,y,z),\ \text{其中} x = \cos s \cos t,\ y = \sin s \cos t,\ z = \sin t \qquad (15) \end{aligned}$$

為求 $\int_{R_{IV}} \alpha_{IV}$，我們進行兩方面變換。首先，讀者可自行驗證，

$${\psi_{IV}}^{-1}(R_{IV}) = [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (16)$$

此外，由於在 $[0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$ 上 $(\frac{\pi}{2},0)$、$(\pi,0)$ 和 $(0,\frac{\pi}{4})$ 這三點呈逆時針排列，而在 R_{IV} 上 $\psi_{IV}(\frac{\pi}{2},0) = (0,1,0)$、$\psi_{IV}(\pi,0) = (-1,0,0)$ 和 $\psi_{IV}(0,\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ 這三點也是呈逆時針排列，可見 ψ_{IV} 是保向的。

其次求 $(\psi_{IV})^*\alpha_{IV}$。沿用前面的方法，先從 (15) 求得

$$\begin{aligned} dx &= -\sin s\cos t ds - \cos s\sin t dt \\ dy &= \cos s\cos t ds - \sin s\sin t dt \qquad (17) \\ dz &= \cos t dt \end{aligned}$$

把 (15) 和 (17) 代入 (14) 等號右端中的 z、dx 和 dy，便可求得

$$\begin{aligned} & (\psi_{IV})^*\alpha_{IV} \\ = \ & \sin^2 t(-\sin s\cos t ds - \cos s\sin t dt) \wedge (\cos s\cos t ds - \sin s\sin t dt) \\ = \ & \sin^3 t\cos t ds \wedge dt \qquad (18) \end{aligned}$$

接著把 (16) 和 (18) 代入 (7) 的第一行的右端 (因為 ψ_{IV} 是保向的)：

$$\int_{R_{IV}} \alpha_{IV} = \int_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin^3 t\cos t ds \wedge dt$$

至此我們把積分 $\int_{R_{IV}} \alpha_{IV}$ 轉化成較簡單的積分，這個積分的積分範圍 $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 空間中的 2 維流形 (而非被嵌入到較高維空間中的 2 維流形), 因此可以運用 (4) 的第一行求這個積分。由於 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^3 t\cos t dsdt = \frac{\pi}{2}$，故有

$$\int_{R_{IV}} \alpha_{IV} = \frac{\pi}{2} \qquad (19)$$

向量分析中有兩種積分－線積分和面積分，分別與以上介紹的微分 1 形式的積分和微分 2 形式的積分存在對應關係，這是以下要介紹的內容。首先考慮線積分。一方面，設有以下向量場：

$$v(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]^T \qquad (20)$$

並設 R 為被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中且有以下參數化形式的曲線，其中 ψ 是保向的：

$$\psi : [a, b] \to R; \ \ \psi(t) = (x, y, z), \text{ 其中} x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t) \qquad (21)$$

則 v 沿著 R 的向量線積分(vector line integral)，記作 $\int_R v \cdot ds$ (注意這裡用小寫 s)，可用以下公式計算：

$$\int_R v \cdot ds = \int_a^b [v_1(\psi(t)), v_2(\psi(t)), v_3(\psi(t))]^T \cdot \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]^T dt \qquad (22)$$

另一方面，利用《數學示例：霍奇星與音樂同構》中的「降號算子」$\flat$ (請參閱該網頁的 (12))，可以把上述向量場 v 轉化成以下微分 1 形式：

$$\flat v(x, y, z) = v_1(x, y, z)dx + v_2(x, y, z)dy + v_3(x, y, z)dz \qquad (23)$$

接著把 $\flat v$ 代入 (7) 第一行 (因為 ψ 是保向的) 中的 α，可得到以下結果：

$$\int_R \flat v = \int_a^b \psi^*(\flat v) \qquad (24)$$

根據《數學示例：前推與拉回》中的「定理 1」，我們有

$$\begin{aligned}\psi^*(\flat v) &= \psi^*(v_1(x,y,z)dx + v_2(x,y,z)dy + v_3(x,y,z)dz) \\ &= (v_1(\psi(t))dx + v_2(\psi(t))dy + v_3(\psi(t))dz)\left(\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]^T\right) dt\end{aligned}$$

根據 dx、dy、dz 和點積的定義，可以從上式進一步推得

$$\psi^*(\flat v) = [v_1(\psi(t)), v_2(\psi(t)), v_3(\psi(t))]^T \cdot \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]^T dt \qquad (25)$$

綜合 (22)、(24) 和 (25)，可得到以下重要定理。

定理 1：設 R 和 v 分別為如上定義的曲線和向量場，則

$$\int_R v \cdot ds = \int_R \flat v \qquad (26)$$

上述定理告訴我們，向量線積分可被看成微分 1 形式的積分。舉例說，考慮以下向量場：

$$v_{III} = [y^2, x]^T \qquad (27)$$

以及前面討論過的曲線 R_{III}。根據 (22)，我們有

$$\begin{aligned}\int_{R_{III}} v_{III} \cdot ds &= \int_{-3}^{2} [t^2, 4 - t^2]^T \cdot [-2t, 1]^T dt \\ &= \frac{245}{6}\end{aligned}$$

另一方面，讀者可自行驗證，$\flat v_{III}$ 等於前面討論過的 α_{III}，而在前面我們計算了 $\int_{R_{III}} \alpha_{III} = \frac{245}{6}$，由此有 $\int_{R_{III}} v_{III} \cdot ds = \int_{R_{III}} \flat v_{III}$，「定理 1」乃得驗證。

其次考慮面積分。一方面，設 v 為如前面 (20) 所示的向量場，R 為被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中且有以下參數化形式的曲面，其中 ψ 是保向的：

$$\psi : D \to R; \;\; \psi(s,t) = (x,y,z), \text{ 其中} x = x(s,t),\; y = y(s,t),\; z = z(s,t) \qquad (28)$$

則 v 沿著 R 的向量面積分(vector surface integral)，記作 $\iint_R v \cdot dS$ (注意這裡用大寫 S)，可用以下公式計算：

$$\begin{aligned}\iint_R v \cdot dS &= \iint_D [v_1(\psi(s,t)), v_2(\psi(s,t)), v_3(\psi(s,t))]^T \\ &\quad \cdot \left(\left[\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right]^T \times \left[\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right]^T \right) d(s,t) \qquad (29)\end{aligned}$$

另一方面，利用前述「降號算子」以及《數學示例：霍奇星與音樂同構》中的「霍奇星算子」$\star$ (請參閱該網頁的 (5))，可以把上述向量場 v 轉化成以下微分 2 形式：

$$(\star\circ\flat)v(x,y,z) = v_3(x,y,z)dx\wedge dy - v_2(x,y,z)dx\wedge dz + v_1(x,y,z)dy\wedge dz \qquad (30)$$

接著把 $(\star\circ\flat)v$ 代入 (7) 第一行 (因為 ψ 是保向的) 中的 α，可得到以下結果：

$$\int_R (\star\circ\flat)v = \int_D \psi^*((\star\circ\flat)v) \qquad (31)$$

根據《數學示例：前推與拉回》中的「定理 1」，我們有

$$\begin{aligned}\psi^*((\star\circ\flat)v) &= \psi^*(v_3(x,y,z)dx\wedge dy - v_2(x,y,z)dx\wedge dz + v_1(x,y,z)dy\wedge dz) \\ &= (v_3(\psi(s,t))dx\wedge dy - v_2(\psi(s,t))dx\wedge dz + v_1(\psi(s,t))dy\wedge dz) \\ &\quad \left(\left[\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right]^T, \left[\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right]^T \right) d(s,t)\end{aligned}$$

根據 $dx\wedge dy$、$dx\wedge dz$、$dy\wedge dz$ 和純量三重積的定義，可以從上式進一步推得

$$\begin{aligned}\psi^*((\star\circ\flat)v) &= [v_1(\psi(s,t)), v_2(\psi(s,t)), v_3(\psi(s,t))]^T \\ &\quad \cdot \left(\left[\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right]^T \times \left[\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right]^T \right) d(s,t) \qquad (32)\end{aligned}$$

綜合 (29)、(31) 和 (32)，可得到以下重要定理。

定理 2：設 R 和 v 分別為如上定義的曲面和向量場，則[2]

$$\iint_R v \cdot dS = \int_R (\star\circ\flat)v \qquad (33)$$

[2]請注意本文沿用多元函數微積分和向量分析的習慣，使用多重 $\int$ 符號來表示面積分和普通的多重積分；但卻沿用流形分析的習慣，僅用一重 $\int$ 符號來表示微分 k 形式的積分 (即使 $k>1$)，所以 (33) 等號左右兩端的式子包含不同數目的 $\int$ 符號。

上述定理告訴我們，向量面積分可被看成微分 2 形式的積分。舉例說，考慮以下向量場：

$$v_{IV} = [0, 0, z^2]^T \qquad (34)$$

以及前面討論過的曲面 R_{IV}。根據 (29)，我們有

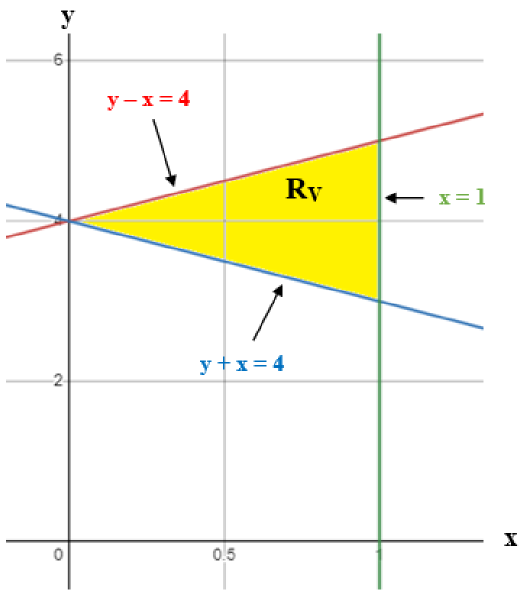
$$\begin{aligned}\int_{R_{IV}} v_{IV} \cdot dS &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} [0, 0, \sin^2 t]^T \\ &\quad \cdot([-\sin s\cos t, \cos s\cos t, 0]^T \times [-\cos s\sin t, -\sin s\sin t, \cos t]^T) d(s,t) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

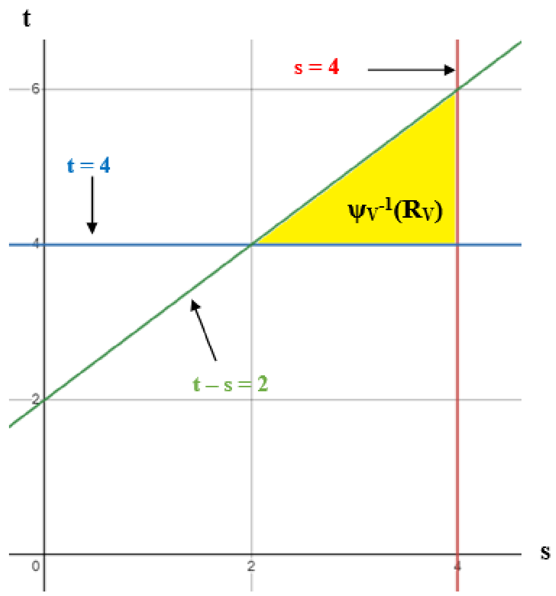
另一方面，讀者可自行驗證，$(\star\circ\flat)v_{IV}$ 等於前面討論過的 α_{IV}，而在前面我們計算了 $\int_{R_{IV}} \alpha_{IV} = \frac{\pi}{2}$，由此有 $\int_{R_{IV}} v_{IV} \cdot dS = \int_{R_{IV}} (\star\circ\flat)v_{IV}$，「定理 2」乃得驗證。

在傳統數學分析中，變項變換可用來使繁複的積分變得較易計算，公式 (7) 也有這種效用。舉例說，考慮 $\mathbb{R}^2$ 上的微分 2 形式：

$$\alpha_V = \frac{1}{(y-x)^2} dx \wedge dy \qquad (35)$$

而積分範圍 R_V 則是如下面左圖所示由直線 $y - x = 4$、$y + x = 4$ 和 $x = 1$ 圍封的黃色範圍：





如用 (4) 直接計算 $\int_{R_V} \alpha_V$，要計算頗為繁複的二重積分。在數學分析中，可

使用「變項變換法」計算上述積分，例如用下式把上式中的 (x, y) 坐標變換成 (s, t) 坐標：

$$s = y - x,\ t = y + x \qquad (36)$$

本文介紹的 (7) 實質上是用微分形式的語言來表述變項變換法，以下讓我們用 (7) 來求 $\int_{R_V} \alpha_V$。為此，先確定以下變項變換函數：

$$\psi_V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \psi_V(s, t) = (x, y),\ 其中 x = \frac{-s+t}{2},\ y = \frac{s+t}{2} \qquad (37)$$

請注意上述函數其實是 (36) 所示數式的逆函數，即 (36) 可被看成 ${\psi_V}^{-1}$。

為求 $\int_{R_V} \alpha_V$，我們進行兩方面變換。首先，把 R_V 變換成 ${\psi_V}^{-1}(R_V)$，方法是利用 (36) 或 (37)(視乎何者較方便計算) 把圍封 R_V 的三條以 x、y 為變項的直線變換成另三條以 s、t 為變項的直線。利用 (36)，容易把 $y - x = 4$ 和 $y + x = 4$ 這兩條直線變換成 $s = 4$ 和 $t = 4$。利用 (37)，則可把 $x = 1$ 變換成 $\frac{-s+t}{2} = 1$，這等價於 $t - s = 2$。總上所述，${\psi_V}^{-1}(R_V)$ 就是上面右圖所示的黃色範圍。此外，由於上面左圖中的三條邊 $y - x = 4$、$y + x = 4$ 和 $x = 1$ 呈逆時針方向排列，而上面右圖中與這三條邊分別對應的 $s = 4$、$t = 4$ 和 $t - s = 2$ 卻呈順時針方向排列，可見 ψ_V 是逆向的。

其次求 $(\psi_V)^*\alpha_V$。讀者可自行驗證，沿用前面的方法，可求得

$$(\psi_V)^*\alpha_V = -\frac{1}{2s^2} ds \wedge dt \qquad (38)$$

最後，運用 (7) 的第二行 (因為 ψ_V 是逆向的) 和 (4) 的第一行進行如下計算：

$$\begin{aligned}
\int_{R_V} \alpha_V &= -\int_{{\psi_V}^{-1}(R_V)} (\psi_V)^*\alpha_V \\
&= -\int_{{\psi_V}^{-1}(R_V)} -\frac{1}{2s^2} ds \wedge dt \\
&= \int_4^6 \int_{t-2}^4 \frac{1}{2s^2} ds dt \\
&= \ln \sqrt{2} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁