數學示例：內蘊導數

我們在《數學示例：列維-奇維塔聯絡》中介紹了「列維-奇維塔聯絡」和「關於某向量場的協變導數」的概念，本文主旨是把上述概念應用到流形上的曲線，並從而推導出流形上的「內蘊導數」、「平行向量場」、「平行移動」和「測地線」等概念。

開始時首先介紹沿著某曲線的向量場(vector field along a curve) 的概念，設 (M, g) 為具有坐標 $(x^1, \ldots, x^m)$ 的 m 維黎曼流形[1]，∇ 為從 g 導出的列維-奇維塔聯絡，I 為實數區間，$c : I \to M$ 為 M 上某條光滑曲線的參數化形式。以下把 c 的論元定為 t，這個 t 可被看作時間變項，這樣 c 便代表某個動點在時段 I 內走過的軌迹，而 $c(t)$ 便是這個動點在時點 t 的位置。現在我們定義「沿著 c 的向量場」如下[2]：

$$v : I \to TM;\ \ v(t) \in T_{c(t)}M \qquad (1)$$

請注意上式所定義的「沿著某曲線的向量場」跟我們在《數學示例：向量與向量場》的 (10) 所定義的「M 上的一般向量場」有所不同：上式的論元是時間變項 t 而非 M 上的點；上式的值 $v(t)$ 則是「寄生」於曲線 c 上的點 $c(t)$ 而非 M 上任意點處的切向量。此外，以下假設 v 是光滑向量場。

接著定義 c 的速度向量場(velocity vector field) 如下 (請注意下面最右一式採用嚴式求和約定)：

$$\frac{dc}{dt} = \left[\frac{dc^1}{dt}, \ldots, \frac{dc^m}{dt}\right]^T = \frac{dc^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (2)$$

在經典力學上，若 f 代表某質點的「位移」，則 $\frac{df}{dt}$ 代表該質點的「速度」，因此上述向量場稱為「速度向量場」。由於 $\frac{dc(t)}{dt}$ 是「寄生」於 $c(t)$ 點處的切向量，所以上述速度向量場是「沿著 c 的向量場」。

---

[1]為簡化符號，這裡只考慮被嵌入到 $\mathbb{R}^m$ 空間中的 m 維流形。若某 m 維流形是被嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 空間中 (其中 $n > m$)，則這個流形的坐標應是 $(x^1, \ldots, x^n)$。

[2]在 (1) 中，TM 代表 M 的「切叢」，請回顧《數學示例：向量與向量場》中有關「切叢」的定義。

給定 M 上某條曲線 c 和沿著 c 的某個向量場 v，我們有沿著 c 的兩個向量場：$\frac{dc}{dt}$ 和 v，因此可以運用《數學示例：列維-奇維塔聯絡》中的概念，求「v 關於 $\frac{dc}{dt}$ 的協變導數」$\nabla_{\frac{dc}{dt}} v$，此一協變導數又稱內蘊導數(intrinsic derivative) 或「絕對導數」(absolute derivative)，以下記作 $\frac{\delta v}{\delta t}$ [3]。我們在上述網頁提供了「關於某向量場的協變導數」$\nabla_v w$ 的計算公式 (即該網頁的 (2))，把 $\frac{dc}{dt}$ 和 v 分別代入該公式的 v 和 w 並作出適當調整[4]，便可得到 $\frac{\delta v}{\delta t}$ 的計算公式如下：

$$\frac{\delta v}{\delta t} = \left(\frac{dv^i}{dt} + (\Gamma^i_{jp} \circ c) \times \frac{dc^j}{dt} \times v^p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (3)$$

內蘊導數作為一種導數，也具有一般導數的線性性質，並且滿足某種乘積法則，這是以下定理的內容。

定理 1：設 M、g 和 c 如上定義，v、v_1、v_2 為 M 上光滑向量場，f 為 M 上光滑實值函數，則

(i) $\frac{\delta(v_1+v_2)}{\delta t} = \frac{\delta v_1}{\delta t} + \frac{\delta v_2}{\delta t}$

(ii) $\frac{\delta(fv)}{\delta t} = \frac{df}{dt} v + f \frac{\delta v}{\delta t}$

由於上述性質跟「關於某向量場的協變導數」的對應性質很相似，而內蘊導數本質上是一種「關於某向量場的協變導數」，這裡不擬對上述性質提供示例。

內蘊導數在黎曼幾何中的重要性在於，它可用來定義「平行」概念。設 M、g、c 和 v 如上定義，則 v 是一個平行向量場(parallel vector field)，若對任何 $t \in I$，都有 $\frac{\delta v}{\delta t} = 0$。舉例說，考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中介紹的 $\mathbb{R}^2$ 上的以下歐幾里得度量 (下式等於上述網頁的 (3))：

$$g_I = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \qquad (4)$$

現設有 $\mathbb{R}^2$ 上的任意曲線 c 和常值向量場如下 (以下假設等號右端的向量是「寄生」於 $c(t)$ 點處的切向量)：

$$v_I(t) = [a, b]^T = a \frac{\partial}{\partial x^1} + b \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (5)$$

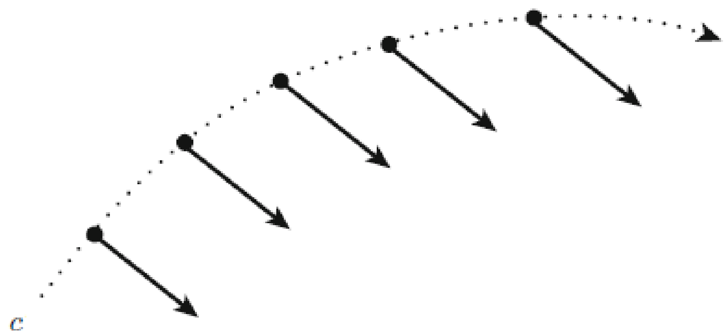
[3] 請注意「內蘊導數」和 $\frac{\delta v}{\delta t}$ 是應用數學和物理學使用的名稱和符號，一般數學教科書則是使用「沿著 c 的協變導數」此一名稱。由於「內蘊導數」較為簡潔，本文使用此一名稱。

[4] 請注意《數學示例：列維-奇維塔聯絡》公式 (2) 中的 v、w 和 Γ^i_{jp} 都是以 $(x^1, \ldots, x^m)$ 而非 t 作為論元，因此要把該公式中的上述函數轉化成以 t 為論元的函數。

其中 a 和 b 是常數。請注意由於 v_I 的值不依賴於 t，所以上式對 $\mathbb{R}^2$ 上任何曲線都成立。根據上述網頁，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，對任何 $i, j, k \in \{1, 2\}$，都有 $(\Gamma_I)^i_{jk} = 0$，由此應有 $(\Gamma_I)^i_{jk} \circ c = 0$。根據 (3)，我們有

$$\begin{aligned}\frac{\delta v_I}{\delta t} &= \frac{da}{dt}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{db}{dt}\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

由此可知在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，沿任何曲線的常值向量場都是平行的，這符合我們對 $\mathbb{R}^2$ 空間中「平行」概念的直觀。下圖展示有關概念：



上圖中的箭頭代表 $\mathbb{R}^2$ 上沿某條曲線 c 的向量場，由於各個箭頭都指向相同的方向，這是一個常值向量場，而這些箭頭全都是平行的。

接著考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中討論過的另一個流形 $H = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 > 0\}$ 以及其上的以下龐加萊度量 (下式等於上述網頁 (9) 中的 g_{III})：

$$g_{II} = \frac{1}{(x^2)^2}\,(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \qquad (6)$$

現設有 H 上的以下曲線：

$$c_{II} : [0, 1] \to H;\;\; c_{II}(t) = (0, 1 + t) \qquad (7)$$

以及以下向量場：

$$v_{II}(t) = [1 + t, 0]^T = (1 + t)\,\frac{\partial}{\partial x^1} \qquad (8)$$

根據上述網頁，在 (H, g_{II}) 上，我們有 $(\Gamma_{II})^2_{11} = \frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{12} = (\Gamma_{II})^1_{21} = (\Gamma_{II})^2_{22} = -\frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{11} = (\Gamma_{II})^1_{22} = (\Gamma_{II})^2_{12} = (\Gamma_{II})^2_{21} = 0$。由此應有 $(\Gamma_{II})^2_{11} \circ$

$c_{II} = \frac{1}{1+t}$，$(\Gamma_{II})^1_{12} \circ c_{II} = (\Gamma_{II})^1_{21} \circ c_{II} = (\Gamma_{II})^2_{22} \circ c_{II} = -\frac{1}{1+t}$，$(\Gamma_{II})^1_{11} \circ c_{II} = (\Gamma_{II})^1_{22} \circ c_{II} = (\Gamma_{II})^2_{12} \circ c_{II} = (\Gamma_{II})^2_{21} \circ c_{II} = 0$。根據 (3)，我們有

$$\begin{aligned}
\frac{\delta v_{II}}{\delta t} &= \left(\frac{d(v_{II})^1}{dt} + ((\Gamma_{II})^1_{12} \circ c_{II}) \times \frac{d(c_{II})^1}{dt} \times (v_{II})^2 \right. \\
&\quad \left. + ((\Gamma_{II})^1_{21} \circ c_{II}) \times \frac{d(c_{II})^2}{dt} \times (v_{II})^1 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + (0) \frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= \left(1 + \left(-\frac{1}{1+t} \right) (0)(0) + \left(-\frac{1}{1+t} \right) (1)(1+t) \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

由此可知 v_{II} 雖然不是常值向量場，但它在 (H, g_{II}) 上卻是平行的。

接著介紹另一個與「平行」有關的概念。設 M、g 和 $c : I \to M$ 如上定義，並設 $t_0 \in I$, 則 $c(t_0)$ 為 M 上一點。現設 v_0 為 $c(t_0)$ 點處的一個切向量，如果有一個平行向量場 v 使得 $v(t_0) = v_0$，則稱 v 為切向量 v_0 沿著曲線 c 的平行移動(parallel transport)。

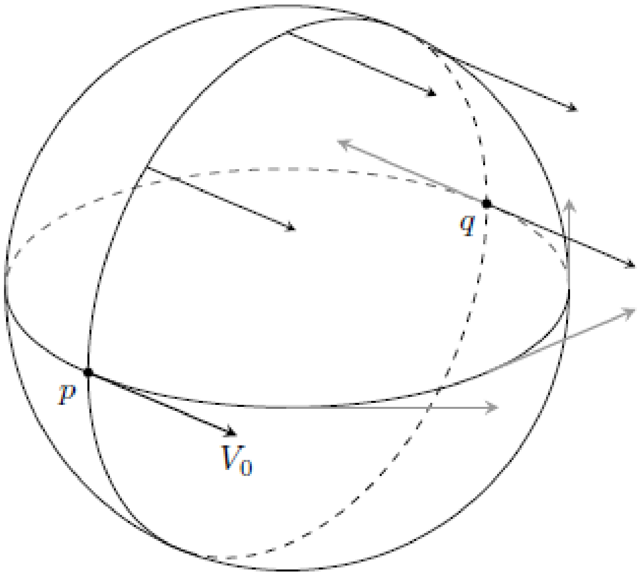
直觀地看，平行移動的作用是把某點處的切向量沿著某曲線平行地移動到另一點處。由於移動前後的切向量互相平行，它們可被看作同一個切向量。利用平行移動，便可把不同點處的切向量進行比較以至運算。換句話說，平行移動起著「聯絡」不同點處切空間的作用。請注意「平行移動」的概念建基於「內蘊導數」，而後者又建基於「列維-奇維塔聯絡」，這就是「列維-奇維塔聯絡」一名中包含「聯絡」一詞的由來。

舉例說，考慮前面討論過的黎曼流形 (H, g_{II})。由於前面已證明了 v_{II} 是平行向量場，根據上述定義，可知對任何 $t \in [0, 1]$ 而言，v_{II} 是切向量 $v_{II}(t)$ 沿著 c_{II} 的平行移動。例如由於 $c_{II}(0) = (0, 1)$，$v_{II}(0) = [1, 0]^T$，並且 $c_{II}(1) = (0, 2)$，$v_{II}(1) = [2, 0]^T$，可知 v_{II} 既是切向量 $[1, 0]^T_{(0,1)}$ [5]的平行移動，也是切向量 $[2, 0]^T_{(0,2)}$ 的平行移動。

直觀地看，也可以把 v_{II} 看成把切向量 $[1, 0]^T_{(0,1)}$ 沿著曲線 c_{II} 平行地移動並變成切向量 $[2, 0]^T_{(0,2)}$。由於這兩個切向量平行，我們可以把它們看作相同的切向量。現在假設有另一個切向量 $[1, 1]^T_{(0,2)}$，那麼我們可以把 $[2, 0]^T_{(0,2)}$ 與 $[1, 1]^T_{(0,2)}$ 相加，從而得到切向量 $[3, 1]^T_{(0,2)}$。請注意由於 $[1, 0]^T_{(0,1)}$ 與 $[1, 1]^T_{(0,2)}$ 分屬不同的切空間 $T_{(0,1)}H$ 和 $T_{(0,2)}H$，兩者不能相加，但利用平行移動 v_{II} 把 $[1, 0]^T_{(0,1)}$ 變成 $[2, 0]^T_{(0,2)}$ 後，便可把 $[2, 0]^T_{(0,2)}$ 與 $[1, 1]^T_{(0,2)}$ 相加。這樣我們便把兩個不同切空間 $T_{(0,1)}H$ 和 $T_{(0,2)}H$ 聯絡起來。

[5]為突顯切向量所「寄生」的點，這裡把「寄生」於 p 點處的切向量 v 寫成 v_p 的形式。

由於平行移動和內蘊導數的定義依賴於曲線 c，同一個切向量沿著不同的曲線可以有不同的平行移動，即使移動到同一個終點，移動結果也可以是各不相同的切向量。下圖展示有關概念：



上圖顯示一個被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 的球面及其上兩點 p 和 q，其中 p 上有一個切向量 V_0。從 p 到 q 有兩條曲線，分別為球面上的「經線」和「緯線」，V_0 沿著這兩條曲線有兩個不同的平行移動。從下圖可以看到，雖然這兩個平行移動都可把 V_0 從 p 點平行地移動到 q 點，但兩個移動結果是指向相反方向的切向量。

在經典力學上，加速度被定義為速度的導數，現在我們可以把此一概念推廣到一般黎曼流形。設 M、g 和 c 如上定義，那麼如前所述，$\frac{dc}{dt}$ 是 c 的速度向量場。由此可以把 c 的加速度向量場(acceleration vector field) 定義為 $\frac{\delta}{\delta t}(\frac{dc}{dt})$。根據 (3)，可以得到加速度向量場的計算公式如下：

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dc}{dt}\right) = \left(\frac{d^2c^i}{dt^2} + (\Gamma^i_{jp} \circ c) \times \frac{dc^j}{dt} \times \frac{dc^p}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (9)$$

有了加速度向量場的概念，便可以把經典力學上的「牛頓第二運動定律」$F = m\frac{dv}{dt}$ (其中 F、m 和 v 分別代表某質點所受到的外力、質量和速度) 應用於黎曼流形。在一般黎曼流形上，上述定律具有以下形式：

$$F = m\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dc}{dt}\right)$$

其中 F 應被理解成一個向量場。由於本文主旨不是介紹物理學，所以這裡不擬為上式提供示例。

加速度向量場還可用來定義另一個重要概念：測地線。我們在《數學示例：測地線》中介紹了「測地線」的概念，並指出在某些情況下，連接某曲面上兩點的測地線是該曲面上連接該兩點的最短路徑，因此測地線可被看成直線概念的推廣。在上述網頁中，測地線是通過「測地曲率」來定義的，以下我們改用加速度向量場來定義測地線。設 M、g 和 c 如上定義，那麼 c 所代表的曲線是 M 上的測地線(geodesic)，若對任何 $t \in I$，都有 $\frac{\delta}{\delta t}(\frac{dc}{dt}) = 0$。

舉例說，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，任意直線具有以下參數化形式：

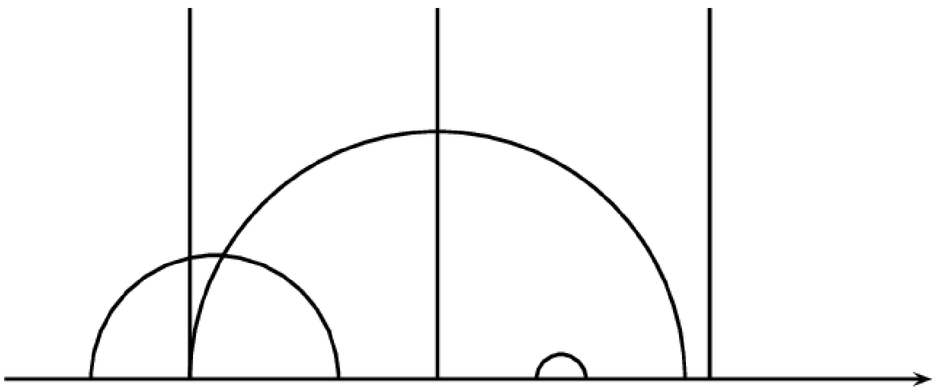
$$c_{III} : I \to \mathbb{R}^2; \;\; c_{III}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt) \qquad (10)$$

其中 $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$。根據 (9) 以及前面介紹的 $(\Gamma_I)^i_{jk}$，我們有

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dc_{III}}{dt}\right) &= \frac{d^2(x_0+at)}{dt^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{d^2(y_0+bt)}{dt^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此可知，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，任何直線都是測地線，這符合前面測地線是直線概念的推廣的論述。

接著考慮 (H, g_{II})，我們在《數學示例：黎曼度量》中曾指出，(H, g_{II}) 上的測地線是懸垂直線或者以 x_1 軸上的點為圓心的半圓，即下圖所示的線段 (不包括 x_1 軸上的點)：



以下讓我們驗證以 $(0,0)$ 點為圓心，半徑為 1 且位於 H 內的順時針半圓是測地線，以下是這個半圓的一個參數化形式：

$$c_{IV} : \mathbb{R} \to H; \;\; c_{IV}(t) = \left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}, \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right) \qquad (11)$$

以下首先計算一些中間結果：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)=-\frac{8e^{2t}(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2e^{t}}{e^{2t}+1}\right)=-\frac{2e^{t}(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{2e^{t}}{e^{2t}+1}\right)=\frac{2e^{t}(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}+1)^3}$$

另外,根據前面有關 $(\Gamma_{II})^i_{jk}$ 的結果,我們有 $(\Gamma_{II})^2_{11}\circ c_{IV}=\frac{e^{2t}+1}{2e^t}$,$(\Gamma_{II})^1_{12}\circ c_{IV}=(\Gamma_{II})^1_{21}\circ c_{IV}=(\Gamma_{II})^2_{22}\circ c_{IV}=-\frac{e^{2t}+1}{2e^t}$, $(\Gamma_{II})^1_{11}\circ c_{IV}=(\Gamma_{II})^1_{22}\circ c_{IV}=(\Gamma_{II})^2_{12}\circ c_{IV}=(\Gamma_{II})^2_{21}\circ c_{IV}=0$。

根據 (9) 和以上中間結果，我們有

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dc_{IV}}{dt}\right) &= \left(\frac{d^2(c_{IV})^1}{dt^2}+((\Gamma_{II})^1_{12}\circ c_{IV})\times\frac{d(c_{IV})^1}{dt}\times\frac{d(c_{IV})^2}{dt}\right.\\
&\quad \left.+((\Gamma_{II})^1_{21}\circ c_{IV})\times\frac{d(c_{IV})^2}{dt}\times\frac{d(c_{IV})^1}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\\
&\quad +\left(\frac{d^2(c_{IV})^2}{dt^2}+((\Gamma_{II})^2_{11}\circ c_{IV})\times\frac{d(c_{IV})^1}{dt}\times\frac{d(c_{IV})^1}{dt}\right.\\
&\quad \left.+((\Gamma_{II})^2_{22}\circ c_{IV})\times\frac{d(c_{IV})^2}{dt}\times\frac{d(c_{IV})^2}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
&= \left(\left(-\frac{8e^{2t}(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^3}\right)+\left(-\frac{e^{2t}+1}{2e^t}\right)\left(\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\right)\left(-\frac{2e^t(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}\right)\right.\\
&\quad \left.+\left(-\frac{e^{2t}+1}{2e^t}\right)\left(-\frac{2e^t(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}\right)\left(\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\\
&\quad +\left(\left(\frac{2e^t(e^{4t}-6e^{2t}+1)}{(e^{2t}+1)^3}\right)+\left(\frac{e^{2t}+1}{2e^t}\right)\left(\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\right)\left(\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\right)\right.\\
&\quad \left.+\left(-\frac{e^{2t}+1}{2e^t}\right)\left(-\frac{2e^t(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}\right)\left(-\frac{2e^t(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

至此證得 c_{IV} 所代表的半圓的確是 (H,g_{II}) 上的測地線。

惟請注意，如用另一個參數化形式表示上述順時針半圓，可能會有不同的計算結果。舉例說，以下是上述半圓的另一參數化形式：

$$c_V : (0, \pi) \to H; \;\; c_V(t) = (-\cos t, \sin t) \qquad (12)$$

請讀者自行驗證，根據 (9)，我們有

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dc_V}{dt}\right) &= -\cos t\,\frac{\partial}{\partial x^1} - \cos t\cot t\,\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

但一條曲線是否測地線不應依賴於其參數化形式，因此我們應把流形 M 上的測地線界定為這樣的曲線：它有至少一個參數化形式 $c : I \to M$ 使得對任何 $t \in I$，$\frac{\delta}{\delta t}(\frac{dc}{dt}) = 0$。

連結至數學專題
連結至周家發網頁