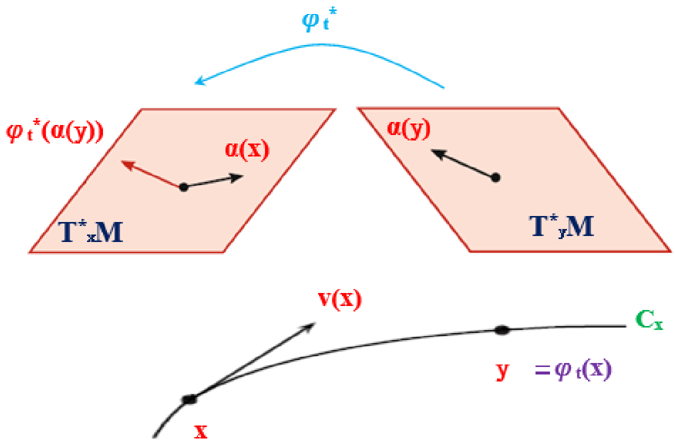
數學示例：張量場的李導數

我們在《數學示例：向量場的李導數》中介紹了向量場 (即 $(1,0)$ 張量場) 的李導數的概念，本文主旨是把李導數概念推廣到其他類型的張量場，首先介紹微分 1 形式 (即餘向量場，亦即 $(0,1)$ 張量場) 的李導數，然後介紹一般 (r,s) 張量場的李導數。

微分 1 形式的李導數的定義跟向量場的李導數的定義很相似，讀者可用下圖幫助理解以下定義：



上圖展示一個向量場 v 於 x 點的向量 $v(x)$，以及 v 於 x 點處的積分曲線 C_x，y 是 C_x 上另一點。上圖還展示了一個微分 1 形式 α 於 x 點和 y 點的餘向量 $\alpha(x)$ 和 $\alpha(y)$，其中 $\alpha(x) \in T_x^*M$ 和 $\alpha(y) \in T_y^*M$。由於 T_x^*M 和 T_y^*M 是兩個不同構的餘切空間[1]，$\alpha(x)$ 和 $\alpha(y)$ 不能相加減。不過，從上圖可以看到，x 點與 y 點不是相互孤立的，而是透過流函數互相聯繫，即 $y = \phi_t(x)$。

另一方面，根據《數學示例：前推與拉回》，從流函數 ϕ_t 可以推導出一個拉回函數 $\phi_t{}^*$ (即上圖中的粉藍色箭頭)，把這個函數作用於 T_y^*M 中的

[1] 嚴格地說，上圖應把 T_x^*M 和 T_y^*M 分別置於 x 點和 y 點處 (因為這兩個餘切空間是「寄生」於這兩點處)，這裡把這兩個餘切空間拉出來放在 C_x 之上，是為了讓讀者看清楚上圖。

餘切向量 $\alpha(y)$，所得結果 ${\phi_t}^*(\alpha(y))$ (即上圖中的紅色箭頭) 是 T_x^*M 中的餘切向量。這麼一來，$\alpha(x)$ 與 ${\phi_t}^*(\alpha(y))$ 便是同一個餘切空間 T_x^*M 中的餘切向量，可以相加減，即可以計算 ${\phi_t}^*(\alpha(y)) - \alpha(x)$。至此我們看到，就計算李導數而言，拉回運算 ${\phi_t}^*$ 對餘切向量的作用類似前推運算 ϕ_{-t*} 對切向量的作用，由此可以推導出「α 於 x 沿著 v 的李導數」(記作 $\mathcal{L}_v\alpha(x)$) 的計算公式如下 (請讀者把下式與《數學示例：向量場的李導數》中的 (14) 和 (15) 作比較)：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v\alpha(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{{\phi_t}^*(\alpha(y)) - \alpha(x)}{t} = \frac{d}{dt}{\phi_t}^*(\alpha(y))\bigg|_{t=0}, \\ &\quad \text{其中 } \phi \text{ 是 } v \text{ 的流函數，} y = \phi_t(x) \qquad (1)\end{aligned}$$

請注意隨著 x 變化,上式會給出不同的餘向量,因此 $\mathcal{L}_v\alpha$ 是一個微分 1 形式。

舉例說，考慮 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 中的以下向量場 (下式等於《數學示例：向量場的李導數》中的 (7))：

$$v_I = [(x^1)^2, x^1x^2]^T = (x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (2)$$

和 $\Gamma(T^*\mathbb{R}^2)$ 中的以下微分 1 形式：

$$\alpha_I = [x^2, -x^1] = x^2dx^1 - x^1dx^2 \qquad (3)$$

我們在上述網頁已計算了 v_I 的流函數如下 (下式等於上述網頁中的 (18))：

$$\phi_t : U_I \to \phi_t(U_I);\ \ \phi_t(x^1, x^2) = (y^1, y^2),\ \text{其中 } y^1 = \frac{x^1}{1 - x^1t},\ y^2 = \frac{x^2}{1 - x^1t} \qquad (4)$$

其中 U_I 代表 $\mathbb{R}^2$ 的某個適當子集。

為用《數學示例：前推與拉回》所介紹的「代入法」以求拉回，首先從 (4) 求得

$$dy^1 = \frac{1}{(1 - x^1t)^2}dx^1, \quad dy^2 = \frac{x^2t}{(1 - x^1t)^2}dx^1 + \frac{1}{1 - x^1t}dx^2 \qquad (5)$$

接著把 (4) 中有關 y^1 和 y^2 的等式以及 (5) 中有關 dy^1 和 dy^2 的等式代入 $\alpha_I(y^1, y^2) = y^2dy^1 - y^1dy^2$，所得結果就是 ${\phi_t}^*(\alpha_I(y^1, y^2))$：

$$\begin{aligned}&{\phi_t}^*(\alpha_I(y^1, y^2)) \\ =\ & \frac{x^2}{1 - x^1t} \times \frac{1}{(1 - x^1t)^2}dx^1 - \frac{x^1}{1 - x^1t}\left(\frac{x^2t}{(1 - x^1t)^2}dx^1 + \frac{1}{1 - x^1t}dx^2\right) \\ =\ & \frac{x^2 - x^1x^2t}{(1 - x^1t)^3}dx^1 - \frac{x^1}{(1 - x^1t)^2}dx^2\end{aligned}$$

最後，根據 (1)，可求得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{v_I}\alpha_I &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2-x^1x^2t}{(1-x^1t)^3}dx^1 - \frac{x^1}{(1-x^1t)^2}dx^2\right)\bigg|_{t=0} \\ &= \left(\frac{2x^1x^2}{(1-x^1t)^3}dx^1 - \frac{2(x^1)^2}{(1-x^1t)^3}dx^2\right)\bigg|_{t=0} \\ &= 2x^1x^2dx^1 - 2(x^1)^2dx^2 \qquad (6)\end{aligned}$$

我們在《數學示例：向量場的李導數》中引入了「李括號」的概念，並指出向量場的李導數與李括號存在等同關係，即 $\mathcal{L}_v w = [v, w]$。微分 1 形式的李導數與李括號也存在一種特殊關係，這是以下定理的內容。

定理 1：設 α 為光滑微分 1 形式，v 和 w 為光滑向量場，則[2]

$$\mathcal{L}_v\alpha(w) = v[\alpha(w)] - \alpha([v, w]) \qquad (7)$$

其中 $v[\ ]$ 代表把 v 看作方向導數算子，並將之作用於 $[\ ]$ 內的函數。原則上我們可以運用上式求 $\mathcal{L}_v\alpha$，但要引入一個抽象的向量場 w，頗為不便。不過，我們可以從上式推導出以下計算公式：設 $v = v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\alpha = \alpha_i\,dx^i$，則

$$\mathcal{L}_v\alpha = \left(v^j\,\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j\,\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)dx^i \qquad (8)$$

接下來讓我們用上式再算一次 $\mathcal{L}_{v_I}\alpha_I$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{v_I}\alpha_I &= \left((x^1)^2\frac{\partial x^2}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial x^2}{\partial x^2} - x^1\frac{\partial x^1x^2}{\partial x^1}\right)dx^1 \\ &\quad + \left((x^1)^2\frac{\partial(-x^1)}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^2} + x^1x^2\frac{\partial(-x^1)}{\partial x^2} - x^1\frac{\partial x^1x^2}{\partial x^2}\right)dx^2 \\ &= 2x^1x^2dx^1 - 2(x^1)^2dx^2 \qquad (9)\end{aligned}$$

上述結果與 (6) 中的結果相同。

至此我們介紹了向量場和微分 1 形式的李導數。接下來要把李導數概念推廣到一般張量場，為此須先引入一般張量的拉回的概念。設有可逆函數 $\psi : M \to N$ (其中 M 和 N 為流形) 以及 $T_{\psi(p)}N^{\otimes r} \otimes T^*_{\psi(p)}N^{\otimes s}$ 中的 (r, s)

[2] 根據 (1)，$\mathcal{L}_v\alpha$ 是以 M 上的點 x 作為論元，為何下式卻是以向量場 w 作為論元？這是因為 $\mathcal{L}_v\alpha$ 作為微分 1 形式，本質上是一種「二重函數」，可以有兩種作用方式。一方面，可以先把 $\mathcal{L}_v\alpha$ 作用於 M 上某點 (此即 $\mathcal{L}_v\alpha(\mathrm{x})$)，所得結果是一個餘向量，然後再將這個餘向量作用於某個向量。另一方面，也可以先把 $\mathcal{L}_v\alpha$ 作用於某個向量場 (此即 $\mathcal{L}_v\alpha(\mathrm{w})$)，所得結果是一個實值函數，然後再將這個函數作用於 M 上某點。

張量 T，則 T 關於 ψ 的拉回，記作 ψ^*T，是 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的 (r,s) 張量。根據 (r,s) 張量的定義，ψ^*T 是這樣的函數，其輸入是 T_p^*M 中的 r 個餘切向量 α_1、...、α_r 和 T_pM 中的 s 個切向量 v_1、...、v_s，而其輸出 $\psi^*T(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,v_1,\ldots,v_s)$ 則是一個實數，這個實數可用下式求得：

$$\psi^*T(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,v_1,\ldots,v_s) = T(\psi^{-1*}\alpha_1,\ldots,\psi^{-1*}\alpha_r,\psi_*v_1,\ldots,\psi_*v_s) \qquad (10)$$

上式右端的式子是合理的，因為該式的論元是 $\psi^{-1*}\alpha_i$ $(1 \le i \le r)$ 和 ψ_*v_j $(1 \le j \le s)$，而 $\psi^{-1*}\alpha_i$ 是 $T^*_{\psi(p)}N$ 中的餘切向量，ψ_*v_j 則是 $T_{\psi(p)}N$ 中的切向量，正可作為 T 的論元[3]。

現設 T 為 $\Gamma(TN^{\otimes r} \otimes T^*N^{\otimes s})$ 中的光滑 (r,s) 張量場 (而非張量)，則「T 於 x 沿著 v 的李導數」(記作 $\mathcal{L}_vT(x)$) 的計算公式如下 (請讀者把下式與 (1) 作比較)：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_vT(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{{\phi_t}^*(T(y)) - \alpha(x)}{t} = \frac{d}{dt}{\phi_t}^*(T(y))\bigg|_{t=0}, \\ &\quad\text{其中 } \phi \text{ 是 } v \text{ 的流函數，} y = \phi_t(x) \qquad (11)\end{aligned}$$

請注意隨著 x 變化，上式會給出不同的 (r,s) 張量，因此 $\mathcal{L}_vT$ 是一個 (r,s) 張量場。

舉例說，考慮前面討論過的向量場 v_I 和 $\Gamma(T(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1} \otimes T^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1})$ 中的以下 $(1,1)$ 張量場：

$$T_I = x^1x^2\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1 - (x^1)^2\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2 + (x^2)^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1 - x^1x^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2 \qquad (12)$$

以下應用《數學示例：前推與拉回》介紹的「解未知項法」求 ${\phi_t}^*(T_I(y^1,y^2))$，為此，我們先把 ${\phi_t}^*(T_I(y^1,y^2))$ 寫成以下形式：

$${\phi_t}^*(T_I(y^1,y^2)) = f_1\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1 + f_2\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2 + f_3\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1 + f_4\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2 \qquad (13)$$

[3]根據類推原則，我們應也可定義張量的前推如下，設 ψ 如上定義，S 為 M 上 p 點處的 (r,s) 張量，則 S 關於 ψ 的前推，記作 ψ_*S，是 N 上 $\psi(p)$ 點處的 (r,s) 張量。設 β_1、...、β_r 為 N 上 $\psi(p)$ 點處的 r 個餘向量，w_1、...、w_s 為 N 上 $\psi(p)$ 點處的 s 個向量，則

$$\psi_*S(\beta_1,\ldots,\beta_r,w_1,\ldots,w_s) = S(\psi^*\beta_1,\ldots,\psi^*\beta_r,\psi_*^{-1}w_1,\ldots,\psi_*^{-1}w_s)$$

容易看到，上式也是合理的。不過，比較上式和 (10)，可以看到 $\psi_*S = \psi^{-1*}S$。正由於此，我們無須特意考慮張量關於 ψ 的前推運算 (因為可用張量關於 ψ^{-1} 的拉回運算來代替)。此外，還可把「張量的拉回」推廣為「張量場的拉回」，這裡不擬作詳細介紹。

其中 f_i $(1 \leq i \leq 4)$ 是接下來要求的函數。為方便以下計算，我們先從 (4) 求得 ϕ_{-t} (請注意根據《數學示例：向量場的李導數》，$\phi_{-t} = {\phi_t}^{-1}$)：

$$\phi_{-t} : \phi_t(U_I) \to U_I;\ \ \phi_{-t}(y^1, y^2) = (x^1, x^2),\ \text{其中}\ x^1 = \frac{y^1}{1 + y^1 t},\ x^2 = \frac{y^2}{1 + y^1 t} \tag{14}$$

由此可求得

$$dx^1 = \frac{1}{(1 + y^1 t)^2} dy^1, \quad dx^2 = -\frac{y^2 t}{(1 + y^1 t)^2} dy^1 + \frac{1}{1 + y^1 t} dy^2 \tag{15}$$

此外，我們也從 (4) 求得 $D(\phi_t)$，即函數 ϕ_t 的雅可比矩陣：

$$D(\phi_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-x^1 t)^2} & 0 \\ \frac{x^2 t}{(1-x^1 t)^2} & \frac{1}{1-x^1 t} \end{bmatrix} \tag{16}$$

現在以 f_1 為例示範如何求上述函數。一方面，從 (13) 可求得

$$\begin{aligned} {\phi_t}^*(T_I(y^1, y^2))\left(dx^1, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) &= f_1 \times 1 + f_2 \times 0 + f_3 \times 0 + f_4 \times 0 \\ &= f_1 \end{aligned}$$

另一方面，根據 (10)，又可求得

$$\begin{aligned} & {\phi_t}^*(T_I(y^1, y^2))\left(dx^1, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) \\ = \ & T_I(y^1, y^2)(\phi_{-t}^* dx^1, \phi_{t*}[1, 0]^T) \\ = \ & \left(y^1 y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} \otimes dy^1 - (y^1)^2 \frac{\partial}{\partial y^1} \otimes dy^2 + (y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y^2} \otimes dy^1 - y^1 y^2 \frac{\partial}{\partial y^2} \otimes dy^2\right) \\ & \left(\frac{1}{(1 + y^1 t)^2} dy^1, \left[\frac{1}{(1 - x^1 t)^2}, \frac{x^2 t}{(1 - x^1 t)^2}\right]^T\right) \\ = \ & y^1 y^2 \times \frac{1}{(1 + y^1 t)^2} \times \frac{1}{(1 - x^1 t)^2} - (y^1)^2 \times \frac{1}{(1 + y^1 t)^2} \times \frac{x^2 t}{(1 - x^1 t)^2} \\ & + (y^2)^2 \times 0 \times \frac{1}{(1 - x^1 t)^2} - y^1 y^2 \times 0 \times \frac{x^2 t}{(1 - x^1 t)^2} \\ = \ & \frac{x^1 x^2 - (x^1)^2 x^2 t}{(1 - x^1 t)^2} \end{aligned}$$

請注意上面第三行使用了「代入法」和 (15) 求拉回 $\phi_{-t}^* dx^1$，並用 (16) 求前推 $\phi_{t*}[1, 0]^T$；上面最後一行則把 (4) 中的 $y^1 = \frac{x^1}{1 - x^1 t}$ 和 $y^2 = \frac{x^2}{1 - x^1 t}$ 代入倒

數第二行，以便把該行的變項從 (y^1, y^2) 改為 (x^1, x^2)。

綜合以上計算結果，可得 $f_1 = \frac{x^1x^2-(x^1)^2x^2t}{(1-x^1t)^2}$。讀者可自行驗證，運用類似上面的方法，可分別求得 $f_2 = -\frac{(x^1)^2}{1-x^1t}$、$f_3 = \frac{(x^2)^2-2x^1(x^2)^2t+(x^1)^2(x^2)^2t^2}{(1-x^1t)^3}$ 和 $f_4 = \frac{-x^1x^2+(x^1)^2x^2t}{(1-x^1t)^2}$。把以上結果代入 (13)，便可得到

$$\begin{aligned}
& {\phi_t}^*(T_I(y^1, y^2)) \\
= & \frac{x^1x^2 - (x^1)^2x^2t}{(1-x^1t)^2}\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - \frac{(x^1)^2}{1-x^1t}\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
& + \frac{(x^2)^2 - 2x^1(x^2)^2t + (x^1)^2(x^2)^2t^2}{(1-x^1t)^3}\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + \frac{-x^1x^2 + (x^1)^2x^2t}{(1-x^1t)^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (17)
\end{aligned}$$

最後，根據 (11)，可求得 (請讀者自行驗證以下計算結果)：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v_I}T_I &= \left.\frac{d}{dt}{\phi_t}^*(T_I(y^1, y^2))\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{(x^1)^2x^2}{(1-x^1t)^2}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - \left.\frac{(x^1)^3}{(1-x^1t)^2}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
&\quad + \left.\frac{x^1(x^2)^2}{(1-x^1t)^2}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - \left.\frac{(x^1)^2x^2}{(1-x^1t)^2}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \\
&= (x^1)^2x^2\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - (x^1)^3\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
&\quad + x^1(x^2)^2\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - (x^1)^2x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (18)
\end{aligned}$$

跟微分 1 形式的情況相似，(r, s) 張量場的李導數與李括號也存在特殊關係，這是以下定理的內容 (請注意下式包含微分 1 形式的李導數 $\mathcal{L}_v\alpha_i$ 和向量場的李導數 $\mathcal{L}_vw_j$，而根據本文的「定理 1」和《數學示例：向量場的李導數》中的「定理 1」，這兩個李導數都與李括號存在聯繫，因此下式雖然表面上不包含李括號，但實質上與李括號存在聯繫)。

定理 2：設 T 為光滑 (r, s) 張量場，α_1、...、α_r 為光滑微分 1 形式，v、w_1、...、w_s 為光滑向量場，則

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_vT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, w_1, \ldots, w_s) \\
= & v[T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, w_1, \ldots, w_s)] - \sum_{i=1}^{r} T(\alpha_1, \ldots, \mathcal{L}_v\alpha_i, \ldots, \alpha_r, w_1, \ldots, w_s) \\
& - \sum_{j=1}^{s} T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, w_1, \ldots, \mathcal{L}_vw_j, \ldots, w_s) \qquad (19)
\end{aligned}$$

(19) 適用於一般的 (r, s) 張量場 T，現在如把 (19) 中的 T 改為微分 1 形式 (即 $(0, 1)$ 張量場) α，由於 α 只需要一個向量場 w 作為其論元，(19) 變成下式：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \alpha(w) &= v[\alpha(w)] - \alpha(\mathcal{L}_v w) \\ &= v[\alpha(w)] - \alpha([v, w]) \end{aligned}$$

上面最後一行應用了《數學示例：向量場的李導數》中的「定理 1」把 $\mathcal{L}_v w$ 改寫為 $[v, w]$。由於上面最後一行等於前面 (7) 中等號右端的式子，由此可見本文的「定理 1」是「定理 2」的特例。

現在如把 (19) 中的 T 改為向量場 (即 $(1, 0)$ 張量場) w。根據《數學示例：餘向量與 1 形式》，w 可被看成「餘餘向量場」，因此需要一個微分 1 形式 α 作為其論元，而 (19) 則變成下式：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v w(\alpha) &= v[w(\alpha)] - w(\mathcal{L}_v \alpha) \\ &= v[\alpha(w)] - \mathcal{L}_v \alpha(w) \\ &= v[\alpha(w)] - v[\alpha(w)] + \alpha([v, w]) \\ &= [v, w](\alpha) \end{aligned}$$

上面各行應用了向量場與微分 1 形式的對稱性質，即若 u 和 β 分別為向量場和微分 1 形式，則 $\beta(u) = u(\beta)$[4]；第三行還應用了「定理 1」把 $\mathcal{L}_v \alpha(w)$ 改寫成 $v[\alpha(w)] - \alpha([v, w])$。從上面最後一行可以抽象出 $\mathcal{L}_v w = [v, w]$，正是《數學示例：向量場的李導數》中「定理 1」的內容，由此可見上述網頁的「定理 1」也是本文「定理 2」的特例。

原則上我們可以運用 (19) 來求 $\mathcal{L}_v T$，但要引入 r 個抽象的微分 1 形式 α_1、...、α_r 和 s 個抽象的向量場 w_1、...、w_s，頗為不便。不過，我們可以從上式推導出以下計算公式：設 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$，則

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_v T \\ = & \left(v^k \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}{\partial x^k} - T^{k i_2 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial v^{i_1}}{\partial x^k} - \ldots - T^{i_1 \ldots i_{r-1} k}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial v^{i_r}}{\partial x^k} \right. \\ & \left. + T^{i_1 \ldots i_r}_{k j_2 \ldots j_s} \frac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}} + \ldots + T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{s-1} k} \frac{\partial v^k}{\partial x^{j_s}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \end{aligned} \tag{20}$$

接著讓我們用上式再算一次 $(\mathcal{L}_{v_I} T_I)^1_1$ 如下：

$$(\mathcal{L}_{v_I} T_I)^1_1$$

[4]請注意 $\mathcal{L}_v \alpha$ 是微分 1 形式，$[v, w]$ 則是向量場。

$$
\begin{aligned}
&= v^k\frac{\partial T_1^1}{\partial x^k} - T_1^k\frac{\partial v^1}{\partial x^k} + T_k^1\frac{\partial v^k}{\partial x^1}\\
&= (x^1)^2\frac{\partial x^1x^2}{\partial x^1} - x^1x^2\frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial x^1x^2}{\partial x^2} - (x^2)^2\frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^2} - (x^1)^2\frac{\partial x^1x^2}{\partial x^1}\\
&= (x^1)^2x^2
\end{aligned}
$$

讀者可自行驗證，運用上式可求得 $(\mathcal{L}_{v_I}T_I)_2^1 = -(x^1)^3$、$(\mathcal{L}_{v_I}T_I)_1^2 = x^1(x^2)^2$ 和 $(\mathcal{L}_{v_I}T_I)_2^2 = -(x^1)^2x^2$，以上計算結果都與 (18) 所示結果一致。

接下來介紹張量場的李導數的一些性質。一個重要性質是組成李導數的向量場和張量場 (即 $\mathcal{L}_vT$ 中的 v 和 T) 各自對於李導數來說具有線性性質。由於此一性質跟向量場的李導數的對應性質很相似，這裡不擬對此性質作詳細闡釋。

另一重要性質是李導數滿足一種類似數學分析中「乘積法則」(product rule) 的性質。具體地說，設 T 為 $\Gamma(TN^{\otimes r}\otimes T^*N^{\otimes s})$ 中的光滑 (r,s) 張量場，U 為 $\Gamma(TN^{\otimes t}\otimes T^*N^{\otimes u})$ 中的光滑 (t,u) 張量場，v 為光滑向量場，則

$$\mathcal{L}_v(T\otimes U) = \mathcal{L}_vT\otimes U + T\otimes\mathcal{L}_vU \qquad (21)$$

以前面討論過的 $(1,1)$ 張量場 T_I 為例，讀者可自行驗證，$T_I = w_I\otimes\alpha_I$，其中 w_I 是《數學示例：向量場的李導數》討論過的以下向量場 (下式等於上述網頁的 (17))：

$$w_I = [x^1, x^2]^T = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (22)$$

而 α_I 則是前面討論過的微分 1 形式 (見 (3))。由於我們已在上述網頁求得 $\mathcal{L}_{v_I}w_I$ 如下 (下式來自上述網頁的 (24))：

$$\mathcal{L}_{v_I}w_I = -(x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (23)$$

並在本網頁求得 $\mathcal{L}_{v_I}\alpha_I$ (見 (6))，現在我們可以應用 (21) 求 $\mathcal{L}_{v_I}T_I$ 如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v_I}T_I &= \mathcal{L}_{v_I}(w_I\otimes\alpha_I)\\
&= \mathcal{L}_{v_I}w_I\otimes\alpha_I + w_I\otimes\mathcal{L}_{v_I}\alpha_I\\
&= \left(-(x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\otimes(x^2dx^1 - x^1dx^2)\\
&\quad + \left(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\otimes(2x^1x^2dx^1 - 2(x^1)^2dx^2)\\
&= (x^1)^2x^2\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1 - (x^1)^3\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2\\
&\quad + x^1(x^2)^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1 - (x^1)^2x^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

上述計算結果跟 (18) 所示結果一致。

接下來介紹一個只適用於微分 k 形式 (即 $(0, k)$ 張量場) 的性質。

定理 3 (嘉當神奇公式Cartan magic formula)：設 v 為光滑向量場，則

$$\mathcal{L}_v = d \circ \iota_v + \iota_v \circ d \qquad (25)$$

其中 d 代表《數學示例：外導數》中介紹的外導數，ι 代表《數學示例：楔積與內部積》中介紹的內部積。請注意由於 d 和 ι_v 只能作用於微分 k 形式，所以上式只適用於微分 k 形式。上式的「神奇」之處在於，它把「李導數」、「外導數」和「內部積」這幾個概念聯繫起來。

接著用前面討論過的向量場 v_I 和微分 1 形式 α_I 驗證上式，為方便以下計算，以下提供外導數和內部積的計算公式：設 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$，則 $d\alpha$ 和 $\iota_v \alpha$ 可用以下兩式計算 (以下兩式可分別從《數學示例：外導數》中的 (5) 和《數學示例：楔積與內部積》中的 (15) 推導而得)：

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (26)$$

$$\iota_v \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} v^{i_s} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (27)$$

接著計算

$$\begin{aligned}
& d \circ \iota_{v_I} \alpha_I \\
= \; & d(x^2 \times (-1)^{1-1} \times (x^1)^2 + (-x^1) \times (-1)^{1-1} \times x^1 x^2) \\
= \; & d(0) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iota_{v_I} \circ d\alpha_I \\
= \; & \iota_{v_I} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial (-x^1)}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial (-x^1)}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^2 \right) \\
= \; & \iota_{v_I} (-2 dx^1 \wedge dx^2) \\
= \; & -2((-1)^{1-1} \times (x^1)^2 dx^2 + (-1)^{2-1} \times x^1 x^2 dx^1) \\
= \; & 2x^1 x^2 dx^1 - 2(x^1)^2 dx^2
\end{aligned}$$

最後，把以上兩個結果加起來：

$$d \circ \iota_{v_I} \alpha_I + \iota_{v_I} \circ d\alpha_I = 2x^1 x^2 dx^1 - 2(x^1)^2 dx^2 \qquad (28)$$

上述計算結果跟 (9) 所示的 $\mathcal{L}_{v_I} \alpha_I$ 一致，由此驗證了 (25)。

公式 (25) 是借助外導數來定義李導數，反過來也可借助李括號 (等於向量場的李導數) 來定義外導數，這是以下定理的內容。

定理 4：設 $\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ 為光滑微分 k 形式、v_0、...、v_k 為光滑向量場，則

$$\begin{aligned}(d\alpha)(v_0, \ldots, v_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i [\alpha(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k)] \\ &\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha([v_i, v_j], v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k) \qquad (29)\end{aligned}$$

以前面討論過的微分 1 形式 α_I 為例，把上式應用於 α_I 和兩個抽象向量場 $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = [v^1, v^2]^T$ 和 $w = w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + w^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = [w^1, w^2]^T$ (其中 v^1、v^2、w^1、w^2 是可隨著 x^1、x^2 而變化的函數)，並應用《數學示例：向量場的李導數》中有關李括號的計算公式 (23)，可求得 (請讀者自行驗證下面第三行的計算結果)：

$$\begin{aligned}(d\alpha_I)(v, w) &= (-1)^0 v[\alpha_I(w)] + (-1)^1 w[\alpha_I(v)] + (-1)^{0+1} \alpha_I([v, w]) \\ &= \left(v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) [(x^2 dx^1 - x^1 dx^2)([w^1, w^2]^T)] \\ &\quad - \left(w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + w^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) [(x^2 dx^1 - x^1 dx^2)([v^1, v^2]^T)] \\ &\quad -(x^2 dx^1 - x^1 dx^2)([[v^1, v^2]^T, [w^1, w^2]^T]) \\ &= -2v^1 w^2 + 2v^2 w^1 \\ &= -2 \begin{vmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{vmatrix} \\ &= -2dx^1 \wedge dx^2 (v, w)\end{aligned}$$

從上述計算結果可以抽象出

$$d\alpha_I = -2dx^1 \wedge dx^2$$

讀者可自行驗證，如直接應用 (26)，可得到與上式相同的結果，由此驗證了 (29)。

連結至數學專題
連結至周家發網頁