數學示例：線性泛函

我們在《數學示例：線性算子》中介紹了線性算子的概念，線性算子是指把某向量空間 $V_{\mathbb{F}}$ (稱為「定義域」) 映射到另一向量空間 $W_{\mathbb{F}}$ (稱為「對應域」) 內的線性函數，這個定義沒有規定對應域必須是哪一種向量空間。現在，如果規定線性算子以域 $\mathbb{F}$ 作為對應域，那麼我們將得到線性算子的一個重要子類－線性泛函(linear functional)。根據上述定義，線性泛函的對應域可以是任何域，但為簡化討論，本文將只考慮以 $\mathbb{R}$ 作為對應域的線性泛函，因此以下把一般的向量空間和賦範空間記作 V。

如同線性算子的情況，我們可以把對線性泛函的研究範圍限制於「有界線性泛函」，並研究這些泛函的「範數」。有界線性泛函及其範數的定義基本跟有界線性算子及其範數的定義相同，但為方便以下討論，現提供有界線性泛函的範數的定義如下：設 F 為把 V 映射到 $\mathbb{R}$ 內的線性泛函，則 (下式相當於《數學示例：線性算子》中的 (4))

$$\|F\| = \sup\left\{\frac{|Fx|}{\|x\|} : x \in V \wedge x \neq 0\right\} \qquad (1)$$

請注意由於 $Fx \in \mathbb{R}$，所以上式把 Fx 的範數寫作 $|Fx|$；另外，$\|x\|$ 代表 x 在其所屬賦範空間中的範數，這裡不為範數符號 $\|\ \|$ 加下標。此外，對 V 中的任何非零元素 x，以下不等式成立 (下式相當於《數學示例：線性算子》中的 (5))：

$$\frac{|Fx|}{\|x\|} \leq \|F\| \qquad (2)$$

以下提供一些線性泛函及其範數的例子。首先考慮 $\mathbb{R}^n$，根據《數學示例：賦範空間》，$\mathbb{R}^n$ 上的範數如下：

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

設 $(a_1, \ldots, a_n)$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的特定成員，現定義以下泛函 (請注意下式實際上等於向量代數中的「點積」運算)：

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

不難證明，F_1 具有線性性質。舉例說，設 $n = 3$ 和 $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{2}, \pi, e)$，那麼

$$F_1(1, 2, 3) = \sqrt{2} + 2\pi + 3e \ \ (\approx 15.8523)$$

接下來討論 F_1 的範數。容易看到，如果 $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$，那麼對任何 $(x_1, \ldots, x_n)$，都有 $F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$，在此情況下，必有 $\|F_1\| = 0$。因此以下只需考慮 $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ 的情況，這裡要應用實數「三角不等式」推廣形式的以下形式[1]：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \qquad (3)$$

以及數學分析中的「柯西-施瓦茨不等式」(Cauchy-Schwarz inequality)：

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \qquad (4)$$

運用 (3) 和 (4)，可以作如下推導：

$$\begin{aligned} |F_1(x_1, \ldots, x_n)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \\ &= \|(a_1, \ldots, a_n)\| \|(x_1, \ldots, x_n)\| \end{aligned}$$

從上式可得以下結果：對於 $\mathbb{R}^n$ 中所有非零成員 $(x_1, \ldots, x_n)$，都有

$$\frac{|F_1(x_1, \ldots, x_n)|}{\|(x_1, \ldots, x_n)\|} \leq \|(a_1, \ldots, a_n)\|$$

由此根據 (1)，可知

$$\|F_1\| \leq \|(a_1, \ldots, a_n)\| \qquad (5)$$

[1]實數「三角不等式」是說：對任何實數 x_1 和 x_2，均有 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$，把此一不等式推廣到 n 個實數之和，便有 $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$。在下式中，相加的 n 個實數是 $x_1 y_1$、...、$x_n y_n$。

另一方面，考慮

$$
\begin{aligned}
|F_1(a_1,\ldots,a_n)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \\
&= \|(a_1,\ldots,a_n)\|^2
\end{aligned}
$$

由此我們有

$$\frac{|F_1(a_1,\ldots,a_n)|}{\|(a_1,\ldots,a_n)\|} = \|(a_1,\ldots,a_n)\|$$

由於 $(a_1,\ldots,a_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非零元素，我們可以應用不等式 (2)，從而得到

$$\|(a_1,\ldots,a_n)\| = \frac{|F_1(a_1,\ldots,a_n)|}{\|(a_1,\ldots,a_n)\|} \leq \|F_1\| \qquad (6)$$

結合 (5) 和 (6)，便得到

$$\|F_1\| = \|(a_1,\ldots,a_n)\|$$

舉例說，如果在 F_1 的定義中取 $n=3$ 和 $(a_1,a_2,a_3)=(\sqrt{2},\pi,e)$，那麼我們有

$$
\begin{aligned}
\|F_1\| &= \|(\sqrt{2},\pi,e)\| \\
&= \sqrt{(\sqrt{2})^2+\pi^2+e^2} \\
&\approx 4.3885
\end{aligned}
$$

接著考慮實數序列空間 l^2, 這個空間中的元素 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 須滿足 $\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2 < \infty$。根據《數學示例：賦範空間》， l^2 上的範數如下：

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2}$$

設 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ 為 l^2 中的特定成員，現定義以下泛函：

$$F_2(x_i)_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

可以證明，由於 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ 和 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 都是 l^2 的元素，上式右端必然趨向於一個實數。此外，還可證明 F_2 具有線性性質。舉例說，設 $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (\frac{1}{2^i})_{i=1}^{\infty}$ 和

$(x_i)_{i=1}^{\infty} = (\frac{1}{3^i})_{i=1}^{\infty}$，那麼我們有

$$\begin{aligned} F_2(x_i)_{i=1}^{\infty} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i} \times \frac{1}{3^i} \right) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

接下來討論 F_2 的範數。比較 $\mathbb{R}^n$ 與 l^2 上範數的定義，並且比較 F_1 與 F_2 的定義，可以看到 l^2 相當於把 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 改為 ∞，而 F_2 也相當於把 F_1 定義中的 n 改為 ∞，因此我們可以沿用上面推導 $\|F_1\|$ 的理據 (這裡還要把前述三角不等式 (3) 和柯西-施瓦茨不等式 (4) 中的 n 改為 ∞)，推導出

$$\|F_2\| = \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|$$

舉例說，如果在 F_2 的定義中取 $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (\frac{1}{2^i})_{i=1}^{\infty}$，那麼我們有

$$\begin{aligned} \|F_2\| &= \left\| \left(\frac{1}{2^i} \right)_{i=1}^{\infty} \right\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

接著考慮函數空間 $C[a,b]$，即定義在 $[a,b]$ 上的實值連續函數組成的空間，這裡沿用《數學示例：賦範空間》中介紹的 $C[a,b]$ 的以下範數：

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

我們在《數學示例：線性算子》中介紹了 $C[a,b]$ 上的「不定積分」(indefinite integral) 算子 (即該網頁的 T_2)，現在如果把該算子定義中的變項 x 改為實數 b，便會得到以下「定積分」(definite integral) 泛函：

$$F_3 f = \int_a^b f(t)\, dt$$

請注意「不定積分」的運算結果是函數，而「定積分」的運算結果卻是實數。跟上述網頁中的「不定積分」算子一樣，這裡定義的「定積分」泛函也具有線性性質。舉例說，設 $[a,b] = [0,1]$ 和 $f(x) = x^2$，那麼我們有

$$\begin{aligned} F_3 f &= \int_0^1 t^2\, dt \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

接下來討論 F_3 的範數。運用我們在《數學示例：線性算子》中引入的數學分析中的不等式 (即該網頁的公式 (10))，可以作如下推導：

$$\begin{aligned} |F_3 f| &= \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \|f\|\,dt \\ &= (b-a)\|f\| \end{aligned}$$

從上式可得以下結果：對於 $C[a,b]$ 中所有非零成員 f，都有

$$\frac{|F_3 f|}{\|f\|} \leq b-a$$

由此根據 (1)，可知

$$\|F_3\| \leq b-a \qquad (7)$$

另一方面，考慮 $C[a,b]$ 的成員 1，即以 1 作為值的常值函數。首先，我們有

$$\|1\| = \max_{x\in[a,b]} |1(x)| = 1$$

其次，我們有

$$\begin{aligned} |F_3 1| &= \left| \int_a^b 1(t)\,dt \right| \\ &= b-a \end{aligned}$$

由此我們有

$$\frac{|F_3 1|}{\|1\|} = b-a$$

由於 1 是 $C[a,b]$ 中的非零元素，我們可以應用不等式 (2)，從而得到

$$b-a = \frac{|F_3 1|}{\|1\|} \leq \|F_3\| \qquad (8)$$

結合 (7) 和 (8)，便得到

$$\|F_3\| = b-a$$

如同有界線性算子的情況，把 V 映射到 $\mathbb{R}$ 內的有界線性泛函構成一個賦範空間。在泛函分析中，這種賦範空間有特殊的名稱，稱為 V 的對偶空間(dual space)，記作 V' [2]。有趣的是，某些對偶空間與某類有界線性泛函的賦範空間「同構」，同構的定義如下：設 $(V_1, \|\ \|_1)$ 和 $(V_2, \|\ \|_2)$ 為賦範空間，若存在把 V_1 映射到 V_2 的一一到上線性算子 Φ (稱為「同構函數」)，使得對任何 $x \in V_1$，均有

$$\|\Phi x\|_2 = \|x\|_1 \qquad (9)$$

則 $(V_1, \|\ \|_1)$ 與 $(V_2, \|\ \|_2)$ 同構，記作 $(V_1, \|\ \|_1) \cong (V_2, \|\ \|_2)$ [3]。換句話說，賦範空間之間的同構等同於向量空間之間的同構，連同一個附加性質：這些同構須能保存範數。

以下提供一些對偶空間及其同構空間的例子。首先考慮 $(\mathbb{R}^n)'$，這個空間的成員是把 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}$ 內的有界線性泛函，例如前述的 F_1 就是 $(\mathbb{R}^n)'$ 的成員。根據上面 F_1 的定義，$\mathbb{R}^n$ 中的任何一個特定成員 $(a_1, \ldots, a_n)$ 都對應著 $(\mathbb{R}^n)'$ 的一個成員，但我們不知道 $(\mathbb{R}^n)'$ 中是否還有其他成員。不過，我們有一個簡單的結果：

$$(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n \qquad (10)$$

為讓讀者了解上式，以下首先重溫 n 維向量空間的哈默爾基底(Hamel basis)的概念[4]。設 V 為 n 維向量空間，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 V 的子集，若 V 中任何向量 x 都可唯一地表示成以下線性組合：

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (11)$$

其中 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，則 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 稱為 V 的哈默爾基底。n 維向量空間可以有多個哈默爾基底 (但每個基底都必然由 n 個向量組成)，我們只考慮以下「標準基底」(canonical basis)：$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)\}$，即 e_i 是除了其第 i 坐標是 1 外其餘所有坐標都是 0 的有序 n 元組。舉例說，$\mathbb{R}^3$ 的標準基底就是 $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$，$\mathbb{R}^3$ 中的任何向量都可用這個基底唯一地表示

[2]如同線性算子的情況，把 V 映射到 $\mathbb{R}$ 內的線性泛函 (不一定有界) 雖然並不構成賦範空間 (因為並非所有線性泛函都有範數)，但卻構成向量空間，稱為 V 的「代數對偶空間」(algebraic dual space)，記作 V^*，請注意 V' 是 V^* 的子空間。

[3]在抽象代數中，「同構」(isomorphism) 是「一一到上」(one-one onto) 和「同態」(homomorphism) 這兩個概念的結合，但上述定義不包含「同態」這個概念，這是因為向量空間 (請注意賦範空間是帶有範數的向量空間) 之間的「線性」關係相當於「同態」關係。

[4]「哈默爾基底」就是線性代數中的一般「基底」，這裡把它稱為「哈默爾基底」，是要把它與下文將要引入的「蕭德基底」加以區分。有關 n 維向量空間及其基底的詳細介紹，請參閱《感受伽羅瓦：向量空間與子域》。

成 (11) 的形式，例如 $(\sqrt{2}, \pi, e)$ 便可唯一地表示成 $\sqrt{2}(1,0,0) + \pi(0,1,0) + e(0,0,1)$。

接著定義 $(\mathbb{R}^n)$' 的 n 個特定成員 f_i (其中 $1 \leq i \leq n$) 如下：設 $x \in \mathbb{R}^n$ 並且 x 可表示成 (11) 的形式，則

$$f_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = x_i \qquad (12)$$

把這 n 個 f_i 合起來，可構成一個「對偶基底」(dual basis)：$\{f_1, \ldots, f_n\}$。利用上述標準基底和對偶基底，可以把任何 $(\mathbb{R}^n)$' 的成員 F 唯一地表示成以下形式 (請注意在下式中，f_i 是 $(\mathbb{R}^n)$' 這個向量空間中的向量，$Fe_i \in \mathbb{R}$ 則是純量，它與 f_i 進行純量乘法)：

$$F = \sum_{i=1}^{n} Fe_i f_i \qquad (13)$$

以下讓我們證明上式是正確的，一方面，把 (13) 的左端作用於 (11)，並利用 F 的線性性質，可得

$$F \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i F e_i$$

另一方面，把 (13) 的右端作用於 (11)，並利用 (12)，可得

$$\sum_{i=1}^{n} Fe_i f_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} Fe_i x_i$$

以上兩式的右端相同，由此證得 (13) 是正確的。

根據 (13)，我們可以推斷一個把 $(\mathbb{R}^n)$' 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的同構函數 Φ_1 如下：設 $F \in (\mathbb{R}^n)$'，則

$$\Phi_1(F) = (Fe_1, \ldots, Fe_n) \qquad (14)$$

事實上，可以證明 Φ_1 是一一到上的線性算子，而且 Φ_1 滿足 (9)，即 $\|\Phi_1 F\| = \|F\|$，由此可見 $(\mathbb{R}^n)$' 的確與 $\mathbb{R}^n$ 同構。

舉例說，如果在前述 F_1 的定義中取 $n = 3$ 和 $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{2}, \pi, e)$，那麼我們有

$$\begin{aligned}
\Phi_1(F_1) &= (F_1 e_1, F_1 e_2, F_1 e_3) \\
&= (F_1(1,0,0), F_1(0,1,0), F_1(0,0,1)) \\
&= (\sqrt{2}, \pi, e)
\end{aligned}$$

請注意由於 F_1 的定義乃建基於 $(\sqrt{2}, \pi, e)$，上述結果完全符合我們的期望。

接著考慮 $(l^2)'$，這個空間的成員是把 l^2 映射到 $\mathbb{R}$ 內的有界線性泛函，例如前述的 F_2 就是 $(l^2)'$ 的成員。我們在前面曾指出，l^2 相當於把 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 改為 ∞，因此我們可以把前面有關 $\mathbb{R}^n$ 的概念推廣到 l^2，但要作適當調整，其中一項調整是要把前述的哈默爾基底推廣為蕭德基底(Schauder basis)。設 V 為向量空間，$(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 是由 V 的元素組成的序列，若 V 中任何向量 x 都可唯一地表示成以下線性組合：

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \qquad (15)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}$，則 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 稱為 V 的蕭德基底。上述定義跟哈默爾基底很相似，所不同者是由哈默爾基底組成的線性組合 (11) 只能包含有限個項，而由蕭德基底組成的線性組合 (15) 卻包含無限個項[5]。

對於 l^2，我們也有「標準基底」$(e_i)_{i=1}^{\infty}$，其中 e_i 是除了其第 i 項是 1 外其餘所有項都是 0 的序列，例如 $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$，$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ 等等。容易看到，l^2 中任何成員都可唯一地表示成上述標準基底的線性組合。此外，對於 $(l^2)'$，我們也有「對偶基底」$(f_i)_{i=1}^{\infty}$，其中 f_i 的定義跟 (12) 大致相同，只需把 (12) 中的 n 改為 ∞ 便可。

接著我們可以大致沿用上面推導 (14) 的理據，不過由於序列包含無窮個項，這裡要應用一些特殊技巧證明 $\sum_{i=1}^{\infty} |Fe_i|^2 < \infty$，即 $(Fe_i)_{i=1}^{\infty} \in l^2$，茲從略。由此得到一個把 $(l^2)'$ 映射到 l^2 的同構函數 Φ_2 如下：設 $F \in (l^2)'$，則

$$\Phi_2(F) = (Fe_i)_{i=1}^{\infty} \qquad (16)$$

事實上，可以證明 Φ_2 是一一到上的線性算子，而且 Φ_2 滿足 (9)，即 $\|\Phi_2 F\| = \|F\|$，由此可得[6]

$$(l^2)' \cong l^2 \qquad (17)$$

如前所述，賦範空間 V 的對偶空間 V' 構成一個賦範空間。照此類推，V' 應也有其對偶空間 $(V')'$，稱為 V 的二次對偶空間(second dual space)，一般簡記作 V''，這個空間的成員是把 V' 的成員映射到 $\mathbb{R}$ 內的有界線性泛函，即有界線性泛函的有界線性泛函。如何找到 V'' 中的成員？一個簡單

[5]這並不代表哈默爾基底必須是有限集合，事實上，由多項式組成的向量空間的哈默爾基底是無窮集合 $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$，但任何多項式都只能是這個基底中有限個項的線性組合。

[6]請注意下式其實是以下事實的特例：設 $1 < p < \infty$，則 $(l^p)' \cong l^q$，其中 p 和 q 滿足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。

方法是首先確定 V 的一個特定成員 b，然後定義以下函數 (請注意在下式中，b 是常數，F 則是變項)：

$$\theta_b(F) = F(b)$$

舉例說，如果在前述 F_1 的定義中取 $n = 3$ 和 $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{2}, \pi, e)$，並設定 $b = (1, 2, 3)$，那麼我們有

$$\begin{aligned}\theta_{(1,2,3)}(F_1) &= F_1(1,2,3) \\ &= \sqrt{2} + 2\pi + 3e \ \ (\approx 15.8523)\end{aligned}$$

以下讓我們證明 θ_b 具有線性性質，設 $F_1, F_2 \in V$' 和 $c, d \in \mathbb{R}$，那麼

$$\begin{aligned}\theta_b(cF_1 + dF_2) &= (cF_1 + dF_2)(b) \\ &= cF_1(b) + dF_2(b) \\ &= c\theta_b(F_1) + d\theta_b(F_2)\end{aligned}$$

此外，也可以證明 θ_b 有界，而且 $\|\theta_b\| = \|b\|$，因此 θ_b 確是 V" 的成員。

上述討論顯示，每個 V 的成員都對應著一個 V" 的成員 (例如前述的 $(1, 2, 3)$ 對應著 $\theta_{(1,2,3)}$)，但對於一般賦範空間 V 而言，V" 可能還有一些並不等於任何 θ_b 的成員。換句話說，對於一般賦範空間 V 而言，V" 的成員與 V 的成員不一定存在一一對應關係，即下式不一定成立：

$$V\text{''} \cong V \qquad (18)$$

在泛函分析中，如果賦範空間 V 滿足 (18)，則 V 稱為自反(reflexive) 的。

根據 (10) 和 (17)，容易看到

$$(\mathbb{R}^n)\text{''} \cong \mathbb{R}^n$$

$$(l^2)\text{''} \cong l^2$$

由此可知 $\mathbb{R}^n$ 和 l^2 是自反的，但並非所有賦範空間都是自反的，例如 l^1、l^∞ 和 $C[a, b]$ 等都不是自反的。

連結至數學專題
連結至周家發網頁