數學示例：線性算子

在數學分析中，除了研究實數的性質外，更重要的是研究實數函數的各種性質，這裡實數函數是指把實數集合映射到實數集合的函數。同樣，在泛函分析中，除了研究各種空間的元素的性質外，更重要的是研究把某空間映射到另一空間的函數的性質。由於函數的種類繁多，如果不加限制，將令研究舉步維艱，因此泛函分析把基本研究範圍限於線性算子(linear operator)。線性算子是指把某向量空間 $V_{\mathbb{F}}$(稱為「定義域」domain)[1]映射到另一向量空間 $W_{\mathbb{F}}$ (稱為「對應域」codomain) 內的函數 T [2](請注意這兩個向量空間的向量集合 V 和 W 可以不同，但其純量集合卻必須是同一個 $\mathbb{F}$；如果 $V = W$，那麼 T 也可稱為「$V_{\mathbb{F}}$ 上的線性算子」)，其中 T 須具備以下「線性」性質：對所有 $x, y \in V$ 和 $c \in \mathbb{F}$，都有[3]

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(cx) &= c(Tx) \end{aligned}$$

在一般應用中，上述兩個條件常可合併為以下條件 (在下式中，$c, d \in \mathbb{F}$)：

$$T(cx+dy) = c(Tx) + d(Ty) \qquad (1)$$

以下提供一些線性算子的例子。設 V 為任意向量空間，那麼 V 上的「零算子」(以下記作 0，即把 V 的任何元素映射為 0 的算子) 和「恆等算子」(以下記作 I，即把 V 的任何元素映射為自身的算子) 都是線性算子。容易看到這兩個算子都滿足上面的 (1)，例如由於 $I(cx+dy) = cx+dy = c(Ix)+d(Iy)$，可見 I 滿足 (1)。

上述兩個算子適用於任何向量空間，接下來介紹一些僅適用於特定向量空間的線性算子。考慮實數序列空間 l^p (其中 $1 \le p < \infty$)，這個

[1]在最一般的情況下，線性算子可以僅以向量空間 $V_{\mathbb{F}}$ 的某個子集 (而非整個 $V_{\mathbb{F}}$) 作為其定義域，但為簡化討論，以下討論的線性算子例子全都以整個 $V_{\mathbb{F}}$ 作為其定義域。

[2]在泛函分析中，一般使用 T 代表線性算子，其中 T 是「變換」(transformation) 一詞的首字母，請注意泛函分析中的「線性算子」相當於線性代數中的「線性變換」。

[3]在泛函分析中，如果算子 T 的論元僅用一個簡單符號表達，一般可略去括弧，即把 $T(x)$ 簡記作 Tx。

空間中的成員是滿足 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ 的序列。現定義算子如下：設 $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)$ 為 l^p 的成員，則

$$T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}=(2x_1,-3x_2,2x_3,-3x_4,\ldots)$$

上述算子把給定序列中的第 1、3、5、... 個項乘以 2，並把第 2、4、6、... 個項乘以 -3，所得結果也是 l^p 的成員，現證明如下：

$$\begin{aligned} & |2x_1|^p+|-3x_2|^p+|2x_3|^p+|-3x_4|^p+\ldots \\ = \ & 2^p|x_1|^p+3^p|x_2|^p+2^p|x_3|^p+3^p|x_4|^p+\ldots \\ \leq \ & 3^p|x_1|^p+3^p|x_2|^p+3^p|x_3|^p+3^p|x_4|^p+\ldots \\ = \ & 3^p(|x_1|^p+|x_2|^p+|x_3|^p+|x_4|^p+\ldots) \qquad (2) \end{aligned}$$

由於 $|x_1|^p+|x_2|^p+|x_3|^p+|x_4|^p+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$，因此我們有 $|2x_1|^p+|-3x_2|^p+|2x_3|^p+|-3x_4|^p+\ldots<\infty$，即 $T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l^p$。此外，可以證明若 $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$，那麼我們有

$$T_1(c(x_n)_{n=1}^{\infty}+d(y_n)_{n=1}^{\infty})=cT_1(x_n)_{n=1}^{\infty}+dT_1(y_n)_{n=1}^{\infty}$$

即 T_1 滿足上面的 (1)。

舉例說，設 $p=2$ 和 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，則

$$\begin{aligned} T_1x &= \left(2\times\frac{1}{2},-3\times\frac{1}{2^2},2\times\frac{1}{2^3},-3\times\frac{1}{2^4},\ldots\right) \\ &= \left(1,-\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{3}{16},\ldots\right) \end{aligned}$$

根據上面的討論，T_1x 是 l^2 的成員。

接著介紹函數空間上的線性算子，考慮函數空間 $C[a,b]$，即定義於 $[a,b]$ 上的實值連續函數。為方便以下計算，這裡假設 $b>a\geq 0$。現定義「不定積分算子」T_2 如下：設 $f\in C[a,b]$ 並且 $x\in[a,b]$，則[4]

$$T_2f(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

根據數學分析，上述積分算子把 $C[a,b]$ 中的任一成員映射為 $C[a,b]$ 中的另一成員。此外，T_2 滿足上面的 (1)，即以下等式成立：

$$\int_a^x(cf+dg)(t)\,dt=c\int_a^x f(t)\,dt+d\int_a^x g(t)\,dt$$

[4]請注意 T_2 是把函數映射為函數的函數，因此下式包含兩重函數結構：T_2 作用於函數 f 得到另一個函數 T_2f，然後這個函數 T_2f 再作用於實數 x 得到另一個實數 $T_2f(x)$。

事實上，以上等式是數學分析中的基本定理。舉例說，設 $[a,b]=[0,1]$ 和 $f(x)=x^2$，那麼根據上式，

$$\begin{aligned} T_2 f(x) &= \int_0^x t^2\,dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}x^3$ 顯然是 $C[0,1]$ 中的成員。

以上討論了積分的情況，微分的情況則較複雜，這是因為連續函數不一定可微，而「可微」(differentiable) 函數的導函數也不一定是連續函數。為解決這個難題，我們可以把考慮範圍縮小到 $C[a,b]$ 的一個子集－定義於 $[a,b]$ 上的多項式，以下記作 $P[a,b]$，其中 P 代表「多項式」(polynomial)。現定義「微分算子」T_3 如下：設 $f\in P[a,b]$ 並且 $x\in[a,b]$，則

$$T_3 f(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$$

根據數學分析，多項式是無限次連續可微函數，而任何多項式的導函數都是多項式，所以上述微分算子確是 $P[a,b]$ 上的算子。此外，根據數學分析，我們知道以下等式成立：

$$\frac{d}{dx}((cf+dg)(x))=c\frac{d}{dx}(f(x))+d\frac{d}{dx}(g(x))$$

因此 T_3 滿足上面的 (1)。舉例說，設 $[a,b]=[0,1]$ 和 $f(x)=x^2$，那麼根據上式，

$$\begin{aligned} T_3 f(x) &= \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$2x$ 顯然是 $P[0,1]$ 中的成員。

線性算子有一個有趣的特點，那就是把向量空間 $V_{\mathbb{F}}$ 映射到另一向量空間 $W_{\mathbb{F}}$ 上的線性算子全體又構成一個向量空間，以下記作 $L(V_{\mathbb{F}},W_{\mathbb{F}})$ (在通常情況下，這裡的 $\mathbb{F}$ 可以略去)。這個空間中的成員是線性算子，而且這些算子之間可以進行加法，並與域 $\mathbb{F}$ 中的元素進行純量乘法，這是因為線性算子的對應域 $W_{\mathbb{F}}$ 是向量空間，因此可以借助 $W_{\mathbb{F}}$ 上的加法和純量乘法來定義 $L(V_{\mathbb{F}},W_{\mathbb{F}})$ 上的加法和純量乘法如下：設 $T,S\in L(V_{\mathbb{F}},W_{\mathbb{F}})$，$x\in V$ 和 $c\in\mathbb{F}$，那麼

$$\begin{aligned} (T+S)(x) &= Tx+Sx \\ (cT)x &= c(Tx) \end{aligned}$$

以多項式空間 $P[a,b]$ 為例，我們在前面介紹了 $P[a,b]$ 上的兩個線性算子 T_2 和 T_3 [5]，現在我們可以把這兩個算子看成 $L(P[a,b],P[a,b])$ 中的成員，而且這兩個算子可以進行加法，並與實數進行純量乘法，所得結果，例如 $2T_2-5T_3$，也是 $L(P[a,b],P[a,b])$ 中的成員。此外，不難證明 $2T_2-5T_3$ 滿足上面的 (1)，即

$$(2T_2-5T_3)(cf+dg)=c(2T_2-5T_3)(f)+d(2T_2-5T_3)(g)$$

由此可見 $2T_2-5T_3$ 確是 $L(P[a,b],P[a,b])$ 中的成員。舉例說，設 $[a,b]=[0,1]$ 和 $f(x)=x^2$，那麼我們有

$$\begin{aligned}(2T_2-5T_3)f &= 2\int_0^x t^2\,dt-5\frac{d}{dx}(x^2)\\ &= \frac{2}{3}x^3-10x\end{aligned}$$

上述結果顯示，把 $2T_2-5T_3$ 作用於多項式 f，所得結果也是多項式。

學過線性代數的讀者應會發現，上面介紹的概念也存在於線性代數中。事實上，如果僅僅考慮向量空間，那麼上述介紹的「線性算子」相當於線性代數中的「線性變換」(linear transformation)。不過，我們在《數學示例：賦範空間》中指出，透過引入範數，可以從向量空間得到賦範空間。因此我們也可以為線性算子引入範數，從而得到由線性算子組成的賦範空間。

但在定義線性算子的範數前，須先定義「有界線性算子」。設 $(V_1,\|\ \|_1)$ 和 $(V_2,\|\ \|_2)$ 為賦範空間，T 為把 V_1 映射到 V_2 內的線性算子，若存在正實數 k，使得對 V_1 中的任何元素 x，都有

$$\|Tx\|_2\le k\|x\|_1$$

那麼我們說 T 是有界(bounded) 的，否則是無界(unbounded) 的。

在上式成立並且 $x\neq 0$ 的情況下，上式可以改寫為

$$\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}\le k \qquad (3)$$

從上式可見，k 是 $\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$ 的「上界」(upper bound)，這個上界不是唯一確定的 (這是因為若某個 k 滿足上式，那麼任何比 k 大的實數也滿足上式)，但

[5]由於對多項式進行不定積分運算，所得結果也是多項式，所以 T_2 也是 $P[a,b]$ 上的線性算子。

如果我們求 $\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$ 的最小上界 (亦即「上確界」supremum)，那麼這個值就是唯一確定的，稱為 T 的範數，以下記作 $\|T\|$，即

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : x \in V_1 \wedge x \neq 0\right\} \qquad (4)$$

可以證明上述範數滿足《數學示例：賦範空間》中有關範數的四條公理。

另外，根據上述定義，可知 $\|T\|$ 是 $\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$ 的上界，因此可以用 $\|T\|$ 取代 (3) 中的 k，即對 V_1 中的任何非零元素 x，都有：

$$\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \leq \|T\| \qquad (5)$$

上述不等式將在下文有廣泛的應用。

接著讓我們看一些例子。設 $(V, \|\ \|)$ 為任意賦範空間，那麼對 V 中任何非零元素 x 而言，顯然都有 $\frac{\|0x\|}{\|x\|} = \frac{0}{\|x\|} = 0$ 和 $\frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$，因此 $\|0\| = 0$ 和 $\|I\| = 1$。

接著討論上面介紹的 T_1 的範數。根據我們在《數學示例：賦範空間》中的討論，l^p 上的範數如下 (請注意以下範數就是上述網頁的 $\|\ \|_3$，為簡化符號，以下不再為範數加下標)：

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

由於 T_1 是把 l^p 映射到 l^p 內的函數，上述範數也適用於 $T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}$，即

$$\|T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = (|2x_1|^p + |-3x_2|^p + |2x_3|^p + |-3x_4|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

根據 (2)，可知上式滿足

$$\begin{aligned}\|T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}\| &\leq (3^p(|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \ldots))^{\frac{1}{p}} \\ &= 3(|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + |x_4|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\ &= 3 \times \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|\end{aligned}$$

從上式可得以下結果：對於 l^p 中所有非零成員 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，都有

$$\frac{\|T_1(x_n)_{n=1}^{\infty}\|}{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|} \leq 3$$

上式是說，3 是 $\left\{\frac{\|T_1(x_n)_{n=1}^\infty\|}{\|(x_n)_{n=1}^\infty\|} : (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p \wedge (x_n)_{n=1}^\infty \neq (0)_{n=1}^\infty\right\}$ 的上界，由此根據 (4) 和上確界的定義，可知

$$\|T_1\| \leq 3 \qquad (7)$$

另一方面，考慮序列 $(0, 1, 0, 0, \ldots)$，即除了第 2 項取值 1 外，所有其他項都取值 0 的序列。首先，容易看到這個序列是 l^p 的成員，並且

$$\|(0, 1, 0, 0, \ldots)\| = (0^p + 1^p + 0^p + 0^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} = 1$$

其次，根據 (6)，我們有

$$\begin{aligned}\|T_1(0, 1, 0, 0, \ldots)\| &= (|0|^p + |-3|^p + |0|^p + |0|^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} \\ &= 3\end{aligned}$$

綜合以上計算結果，我們有

$$\frac{\|T_1(0, 1, 0, 0, \ldots)\|}{\|(0, 1, 0, 0, \ldots)\|} = 3$$

由於 $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ 是 l^p 中的非零元素，我們可以應用不等式 (5)，從而得到

$$3 = \frac{\|T_1(0, 1, 0, 0, \ldots)\|}{\|(0, 1, 0, 0, \ldots)\|} \leq \|T_1\| \qquad (8)$$

結合 (7) 和 (8)，便得到

$$\|T_1\| = 3$$

接著討論上面介紹的 T_2 的範數。根據我們在《數學示例：賦範空間》中的討論，$C[a, b]$ 上的範數如下 (請注意以下範數就是上述網頁的 $\| \ \|_4$)：

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

由於 T_2 是把 $C[a, b]$ 映射到 $C[a, b]$ 內的函數，上述範數也適用於 $T_2 f$，即

$$\|T_2 f\| = \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \qquad (9)$$

另一方面，根據數學分析，當 x 是 $[a, b]$ 中某個確定的實數時，以下不等式成立：

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\, dt \qquad (10)$$

而且必有

$$\begin{aligned}\int_a^x |f(t)|\,dt &\le \int_a^x \max_{t\in[a,x]} |f(t)|\,dt\\ &\le \int_a^x \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,dt\\ &= \int_a^x \|f\|\,dt\\ &= (x-a)\|f\|\\ &\le (b-a)\|f\|\end{aligned}$$

把 (10) 與上述結果結合，可得

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le (b-a)\|f\|$$

由於上述不等式對任何 $x \in [a,b]$ 都成立，當上式左端的值取最大值時，上式仍然成立，由此根據 (9)，可得

$$\|T_2 f\| \le (b-a)\|f\|$$

從上式可得以下結果：對於 $C[a,b]$ 中所有非零成員 f，都有

$$\frac{\|T_2 f\|}{\|f\|} \le b-a$$

上式是說，$b-a$ 是 $\left\{\frac{\|T_2 f\|}{\|f\|} : f \in C[a,b] \wedge f \neq 0\right\}$ 的上界，由此根據 (4) 和上確界的定義，可知

$$\|T_2\| \le b-a \qquad (11)$$

另一方面，考慮以 1 作為值的常值函數 (以下把這個函數記作 1，即對任何 $x \in [a,b]$，都有 $1(x)=1$)。首先，容易看到

$$\|1\| = \max_{x\in[a,b]} |1(x)| = 1$$

其次，根據 (9)，我們有

$$\begin{aligned}\|T_2 1\| &= \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x 1(t)\,dt\right|\\ &= \max_{x\in[a,b]} (x-a)\\ &= b-a\end{aligned}$$

綜合以上計算結果，我們有

$$\frac{\|T_2 1\|}{\|1\|} = b - a$$

由於 1 是 $C[a,b]$ 中的非零元素，我們可以應用不等式 (5)，從而得到

$$b - a = \frac{\|T_2 1\|}{\|1\|} \leq \|T_2\| \qquad (12)$$

結合 (11) 和 (12)，便得到

$$\|T_2\| = b - a$$

接著討論上面介紹的 T_3，由於 $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的子集，這裡沿用 $C[a,b]$ 的範數，因而有

$$\|T_3 f\| = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{d}{dx}(f(x)) \right| \qquad (13)$$

跟 T_1 和 T_2 不同，T_3 是無界的。為證明這一點，我們要證明並不存在滿足 (3) 的正實數 k。為此，要證明給定任何正實數 k，總能找到一個非零多項式 f，使得 $\frac{\|T_3 f\|}{\|f\|} > k$。假設給定正實數 k，我們總能找出一個正整數 n 使得 $\frac{n}{b} > k$ (例如如果 $b = \frac{1}{3}$，$k = 100$，那麼可以設定 $n = 34$)，現在考慮多項式 $f(x) = x^n$。由於我們在上面假設了 $b > a \geq 0$，故有

$$\begin{aligned} \|f\| &= \max_{x\in[a,b]} |x^n| \\ &= b^n \end{aligned}$$

另外，根據 (13)，我們有

$$\begin{aligned} \|T_3 f\| &= \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{d}{dx}(x^n) \right| \\ &= \max_{x\in[a,b]} (|nx^{n-1}|) \\ &= nb^{n-1} \end{aligned}$$

綜合以上計算結果，我們有

$$\frac{\|T_3 f\|}{\|f\|} = \frac{n}{b} > k$$

至此證得 T_3 是無界的，因此 $\|T_3\|$ 無定義。

前面說過，把 $V_{\mathbb{F}}$ 映射到 $W_{\mathbb{F}}$ 的線性算子可以進行代數運算 (即線性算

子之間的加法，以及線性算子與域 $\mathbb{F}$ 中的元素的純量乘法)，構成向量空間 $L(V_{\mathbb{F}}, W_{\mathbb{F}})$。現在我們看到，有界線性算子不僅可以進行代數運算，而且具有範數，因此把 $V_{\mathbb{F}}$ 映射到 $W_{\mathbb{F}}$ 內的有界線性算子構成賦範空間，以下記作 $B(V_{\mathbb{F}}, W_{\mathbb{F}})$，這是 $L(V_{\mathbb{F}}, W_{\mathbb{F}})$ 的子空間。根據以上的討論，T_1 是 $B(l^p, l^p)$ 的成員，T_2 是 $B(C[a,b], C[a,b])$ 的成員，而 T_3 卻不是 $B(P[a,b], P[a,b])$ 的成員，儘管它是 $L(P[a,b], P[a,b])$ 的成員。

連結至數學專題
連結至周家發網頁