數學示例：距離空間

距離空間(metric space) 是泛函分析和點集拓樸的基本課題。「距離空間」一名所包含的「距離」和「空間」這兩個詞不是我們通常理解的幾何學／物理學概念，而是一個抽象數學概念，是指由某一類數學對象 (例如數、向量、矩陣、序列、函數等) 組成的集合 X，連同這個集合上的一個距離函數(metric 或 distance function)[1]，以下記作 d，其中 d 是一個二元實值函數 (即以 X 中兩個元素作為輸入，並以實數作為輸出值的函數)，並且滿足一系列公理：設 $x, y, z \in X$，則

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0$ 當且僅當 $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

由於距離空間的定義包含一個集合 X 和一個距離函數 d，嚴格地說，距離空間應表示成有序對 (X, d) 的形式[2]，但若在某些特殊情況下或根據上下文，距離函數 d 不言而喻，那麼也可把 d 省略，即僅用集合符號 X 代表距離空間。

上面距離函數的四條公理是數學家把人們日常理解的空間和距離概念類推到一般集合的結果，集合 X 的元素被看成某個空間中的點，距離函數則提供這些點之間的距離。公理 (i) – (iii) 是說任何兩個點之間的距離都不可能是負數，兩個相異點之間的距離都是大於 0 的正數，任何點只有與自身的距離才是 0。此外，距離具有對稱性，即 x 與 y 的距離相等於 y 與 x 的距離。由此可見，公理 (i) – (iii) 反映我們對距離這個概念的直觀認識。

公理 (iv) 中的不等式一般稱為三角不等式(triangle inequality)，這是因為如果把該式中的 x、y 和 z 看成某三角形的三個頂點，並且把 $d(x, y)$ 看

[1]請注意英語詞"metric" 在不同數學分支中可以指稱不同的概念，因而也有不同的譯名。在泛函分析和點集拓樸中，"metric" 一般譯作「距離」；在微分幾何和黎曼幾何中，則一般譯作「度量」。

[2]這種情況就像在抽象代數中，我們要把「群」(group) 表示成有序對 $(G, \circ)$，其中 G 是集合，$\circ$ 則是 G 上的二元運算一樣。

成由 x 和 y 組成的邊的長度 (餘類推)，那麼該公理與平面幾何中的三角不等式定理(Triangle Inequality Theorem) 很相似，即任意三角形任何兩條邊長度之和大於第三條邊的長度，如下圖所示：

惟請注意上述「三角不等式定理」所用的是「嚴格大於」關係 (使用 $>$ 符號)，而公理 (iv) 所用的卻是「大於或等於」關係 (使用 $\geq$ 符號)。換一個角度看，我們也可以把公理 (iv) 看成容許以下「退化三角形」的情況，即當上圖所示三角形中 AC 的夾角達到 $180°$，並且 BC 的夾角和 AB 的夾角都變成 $0°$ 時，B 的長度便等於 A 的長度加上 C 的長度。由此可見，公理 (iv) 實在是平面幾何中「三角不等式定理」的推廣。

距離空間的典型例子是實數集 $\mathbb{R}$ 連同其上的距離函數

$$d_1(x, y) = |x - y| \qquad (1)$$

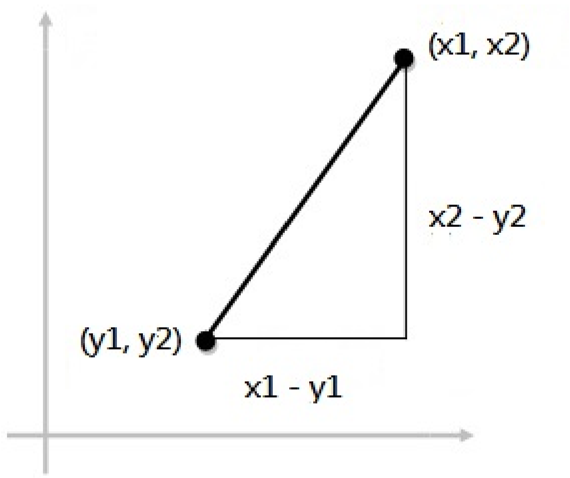
其中 $|\ |$ 代表「絕對值」(absolute value)。如果把實數看成實數軸上的點，那麼上述距離函數的確反映實數軸上兩點之間的距離，例如直觀上我們知道 1 與 2 之間的距離等於 -1 與 -2 之間的距離，而我們的確有 $|1 - 2| = |-1 - (-2)| = 1$。

當然，當我們說某集合 X 連同其上的函數 d 是距離空間時，我們應證明 d 的確滿足上述四條公理。一般來說，公理 (i) – (iii) 的證明並不困難，而公理 (iv) 的證明卻常須應用一些額外知識。以前述的 $(\mathbb{R}, d_1)$ 為例，根據絕對值的定義，容易看到對任何 $x, y \in \mathbb{R}$，均有 $|x - y| \geq 0$；$|x - y| = 0$ 當且僅當 $x = y$ 以及 $|x - y| = |y - x|$，即 d_1 滿足公理 (i) – (iii)。但如要證明 d_1 滿足公理 (iv)，即對任何 $x, y, z \in \mathbb{R}$，均有 $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$，便要應用實數的某些性質。為免引入過多細節，以下我們將略去這些證明。

接下來我們把上述 $\mathbb{R}$ 推廣為 $\mathbb{R}^2$，即由所有有序對 (x_1, x_2) (其中 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) 組成的集合，跟 $\mathbb{R}^2$ 相關的距離函數是

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad (2)$$

下圖提供上式的理據：



根據上圖，應用「畢達哥拉斯定理」(Pythagoras Theorem)，便可得到上面 d_2 的公式，由此可見 d_2 的確反映平面上兩點的距離。

我們還可以把上述概念進一步推廣為 $\mathbb{R}^n$,即由所有有序 n 元組 $(x_1, \ldots, x_n)$ (其中 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$) 組成的集合，而相關的距離函數是

$$d_3((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \qquad (3)$$

有序 n 元組是由 n 個實數組成的有序結構，如果把這裡的有限數 n 推廣為 (可數) 無窮大 ∞, 我們便得到「序列」(sequence)。舉例說, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$ 便是一個序列，這個序列由 (可數) 無窮多個實數組成，其中第 n 項是實數 $\frac{1}{n}$。一般地，序列可以表示成 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ 的形式，其中 $x_n \in \mathbb{R}$ 代表第 n 項，也可精簡地表示成 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$。在這種精簡表示法下，上例可以表示成 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$。

由於序列由無窮多個實數組成，如果對序列不加限制，便不能得到合適的距離函數 (即輸出值為有限實數的距離函數)。對序列施加不同限制，便可得到不同的距離函數，從而得到不同的距離空間，這些由序列組成的空間統稱為序列空間(sequence space)。

對序列施加的最簡單限制是規定序列必須為「有界序列」(bounded sequence)，即不會趨向正／負無窮大的序列。確切地說，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界序列，若存在實數 M 使得對所有 n，均有 $|x_n| \leq M$。以下把有界序列組成的集合記作 l^{∞}，例如前述的 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ 便是 l^{∞} 的成員，因為這個序列中所有項的絕對值都小於或等於 1。

以下是與 l^∞ 相關的距離函數：

$$d_4((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \qquad (4)$$

在上式中，sup 代表「上確界」(supremum，亦稱「最小上界」least upper bound)(在數學上, $\sup S$ 是集合 S 中所有元素的上界, 即 S 中所有元素都小於或等於 $\sup S$, 並且如果 a 是 S 中所有元素的另一個上界, 則 $\sup S \le a$)[3]；$\mathbb{N}$ 則代表自然數集 (粗略地說，即由 1 到無窮大，因此囊括了序列的所有項)。上式是說，d_4 等於 $|x_1 - y_1|$、$|x_2 - y_2|$、...、$|x_n - y_n|$、.... 這無窮多個數的上確界。請注意在數學上，(4) 右端的式子也可寫作以下較簡潔的形式：

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

以下在表達某個集合的上確界時，我們將視乎行文需要，有時採用 (4) 右端式子的形式，有時則採用上面的形式。

舉例說，設 $x = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$ 和 $y = (\frac{1}{2n})_{n=1}^\infty$，容易看到這兩個序列都是有界序列。根據這兩個序列的定義, 我們有 $|x_1 - y_1| = |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|x_2 - y_2| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$, $|x_3 - y_3| = |\frac{1}{3} - \frac{1}{6}| = \frac{1}{6}$，...。從上述計算可以看到，$|x_n - y_n|$ 的值會隨著 n 增大而不斷減少，因此這無窮多個數的上確界是 $\frac{1}{2}$，即 $d_4(x, y) = \frac{1}{2}$。

除了有界序列外，我們還可以研究一些有特殊收斂性質的序列。設 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 為序列，p 為實數 (其中 $p \ge 1$)，我們可以研究 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 是否具有以下收斂性質：

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \qquad (5)$$

舉例說，當 $p = 1$ 時，前面討論過的 $(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$ 便不滿足 (5)，這是因為 $\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{n}\right|^1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ 是有名的「調和級數」(harmonic series)，而這個級數的極限是 ∞。

另一方面，當 $p = 1$ 時，$(\frac{1}{2^n})_{n=1}^\infty$ 則滿足 (5)，這是因為我們有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{2^n}\right|^1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

[3]如果讀者對「上確界」的概念感到陌生，那麼可以把「上確界」近似地看成某個數值集合中最大的元素。請注意在無窮集合中，可能不存在最大元素，所以這裡要使用「上確界」的概念。下文會提供一個求上確界的例子。

事實上，對於任何大於或等於 1 的實數 p，都有 $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ 滿足 (5)，這是因為

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|^p &= \frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{2^{3p}}+\cdots \\ &= \frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{2^p}\right)+\frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{2^p}\right)^2+\cdots\end{aligned}$$

另一方面，根據幾何級數的公式，若 $|r|<1$，則

$$a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}$$

由於若 $p\geq 1$，則 $|\frac{1}{2^p}|<1$，故可把此公式套用到上述計算中，由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|^p &= \frac{\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2^p}} \\ &= \frac{1}{2^p-1}\end{aligned}$$

至此證得當 $p\geq 1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{2^n}|^p$ 滿足 (5) 所示的條件。以下把滿足 (5) 的序列組成的集合記作 l^p，以下是與 l^p 相關的距離函數：

$$d_5((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

舉例說，設 $p=2$，$x=(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ 和 $y=(\frac{1}{2^{n+1}})_{n=1}^{\infty}$，這兩個序列顯然都是 l^2 的成員。利用幾何級數的公式，可以算得

$$\begin{aligned}d_5(x,y) &= (|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2+\cdots)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

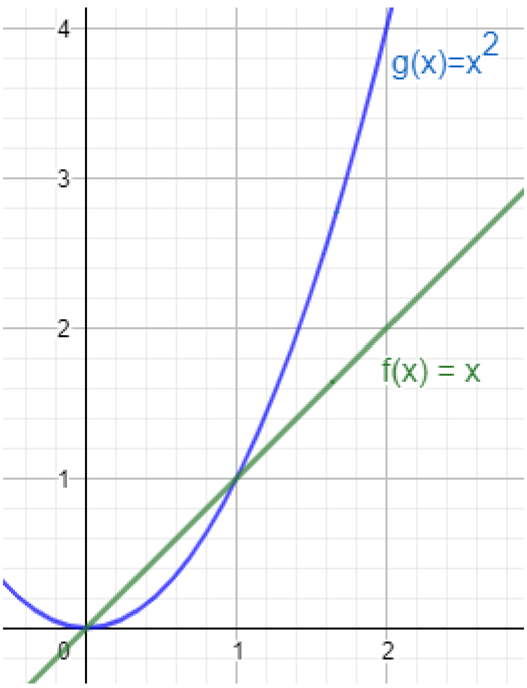
接下來討論一些更抽象的以函數作為元素的距離空間。在這些距離空間中，函數被看成點，因而可以討論不同函數之間的距離。如同序列的情況，由於

存在多種多樣函數，如對函數不加限制，便不能得到合適的距離函數。對函數施加不同限制，便可得到不同的距離函數，從而得到不同的距離空間，這些由函數組成的空間統稱為函數空間(function space)。

對函數施加的一種簡單限制是規定函數必須是定義於某一閉區間 $[a, b]$ (其中 $a, b \in \mathbb{R}$) 上的實值連續函數，以下把這類函數組成的集合記作 $C[a, b]$，其中 C 代表「連續」(continuous)。根據數學分析上的「極值定理」(extreme value theorem)，若 f 是定義於 $[a, b]$ 上的實值連續函數，則 f 必可在 $[a, b]$ 上取得最大值，即必存在 $c \in [a, b]$，使得 $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$，這裡 $\max S$ 代表數值集合 S 中具有最大數值的元素。請注意跟 sup 的情況相似，我們有時會把 $\max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ 寫成較簡潔的形式：$\max_{x\in[a,b]} f(x)$。基於上述定理，可以定義與 $C[a, b]$ 相關的距離函數如下 (在下式中，f 和 g 為實值連續函數)[4]：

$$d_6(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \qquad (7)$$

舉例說，設 $[a, b] = [0, 1]$，$f(x) = x$ 和 $g(x) = x^2$，這兩個函數顯然都是 $C[0, 1]$ 的成員，以下是這兩個函數的圖像：



接著求 $d_6(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |x - x^2|$，由於在 $[0, 1]$ 上，$x \geq x^2$，我們實際上

[4]請注意根據數學分析，若 f 和 g 是連續函數，則 $f - g$ 也是連續函數；若 f 是連續函數，則 $|f|$ 也是連續函數。

要求 $\max_{x\in[0,1]}(x-x^2)$。運用數學分析中的技巧，寫出 $h(x)=x-x^2$ 的一階導數 $h'(x)=1-2x$ 和二階導數 $h''(x)=-2$，然後求 $h'(x)$ 在哪一點上取 0 值，即解 $1-2x=0$，求得 $x=\frac{1}{2}$。由於 $h''(x)$ 在 $[0,1]$ 上恆取負值，故知 $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 是 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 (而非最小值或拐點)，即 $d_6(f,g)=\frac{1}{4}$。

如前所述，距離空間由一個集合和一個距離函數組成，因此如果對一個集合賦與不同的距離函數，便會得到不同的距離空間。以 $C[a,b]$ 為例，除了以前述的 d_6 作為距離函數外，也可以以下函數作為距離函數 (在下式中，$p\geq 1$)：

$$d_7(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (8)$$

上述距離函數是合理的，這是因為如果 f 和 g 是連續函數，那麼 $|f-g|^p$ (其中 $p\geq 1$) 也必然是連續函數。另一方面，根據數學分析中的知識，任何定義於閉區間上的連續函數都是「(黎曼) 可積」((Riemann-)integrable) 的，因此上述 (黎曼) 積分的值是有限非負實數，可以對其求 p 次方根。

舉例說，設 $p=1$，$[a,b]=[0,1]$，$f(x)=x$ 和 $g(x)=x^2$，根據 (8)，我們有

$$\begin{aligned} d_7(f,g) &= \left(\int_0^1 |x-x^2|^1\,dx\right)^1 \\ &= \int_0^1 (x-x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

上述計算結果跟前面計算的 $d_6(f,g)=\frac{1}{4}$ 有別，這顯示同一對元素 f 和 g 作為 $(C[a,b],d_6)$ 和 $(C[a,b],d_7)$ 這兩個不同距離空間的成員可以有不同的距離。

對函數的另一種限制是規定函數必須是定義於某一定義域 X 上的實值有界函數，即滿足以下性質的實值函數 f：存在實數 M 使得對所有 $x\in X$，均有 $|f(x)|\leq M$。以下把這類函數組成的集合記作 $B(X)$，其中 B 代表「有界」(bounded)。請注意這裡沒有對 X 作任何限制，X 不一定是有界閉集，因此若 h 是定義於 X 上的實值有界函數，h 不一定在 X 上取得最大值，但由於 h 有界，根據實數的性質，它在 X 上必有上確界，由此可以定義與 $B(X)$ 相關的距離函數如下 (在下式中，f 和 g 為實值有界函數)：

$$d_8(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)| \qquad (9)$$

舉例說，設 $X=(1,2)$，$f(x)=x$ 和 $g(x)=x^2$，這兩個函數顯然都是 $B((1,2))$ 的成員。接著求 $d_8(f,g)=\sup_{x\in(1,2)}|x-x^2|$，由於在 $(1,2)$ 上，$x\leq x^2$，我們

實際上要求 $\sup_{x\in(1,2)}(x^2-x)$。運用數學分析中的技巧，寫出 $h(x)=x^2-x$ 的一階導數 $h'(x)=2x-1$。由於 $h'(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上恆取正值，可知 $h(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是遞增函數，即 $h(x)$ 的值隨著 x 而不斷增加。由於 $(1,2)$ 是開區間，$h(x)$ 永不會在這個區間上取得最大值。

但 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上卻有上確界，此即 $h(2)=2$，以下讓我們證明這一點。首先，由於 $h(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上遞增，故 $h(2)$ 必是 $\{h(x):x\in(1,2)\}$ 的上界。其次，若 $h(a)$ 是 $\{h(x):x\in(1,2)\}$ 的另一個上界而且 $h(a)<h(2)$，那麼根據 h 的遞增性，必有 $a<2$。根據實數的性質，必存在 $b\in(1,2)$ 使得 $a<b<2$，由此再根據 h 的遞增性，必有 $h(a)<h(b)<h(2)$。但這麼一來，$h(a)$ 便不可能是 $\{h(x):x\in(1,2)\}$ 的上界，此一矛盾告訴我們 $\{h(x):x\in(1,2)\}$ 的任何上界 $h(a)$ 都必定滿足 $h(2)\leq h(a)$，即 $h(2)$ 是 $\{h(x):x\in(1,2)\}$ 的上確界。總上所述，$d_8(f,g)=2$。

連結至數學專題
連結至周家發網頁