

數學示例：算子倒數

我們在《數學示例：待定係數法》和《數學示例：含任意函數的解》中介紹了運用「待定係數法」求解常係數非齊次常微分／常差分／偏微分／偏差分方程的特解的方法，這種方法的優點是直觀易明，但缺點卻是有時要求解頗為繁瑣的 1 次方程組。在某些特殊情況下，有一種較簡單的求解方法，這種方法要應用「算子倒數」的概念。

先從常係數非齊次常微分／差分方程說起，這種方程可以寫成以下一般形式：

$$P(\phi)f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

在上式中， ϕ 代表算子 D 或 E ， $P(\phi)$ 代表以 ϕ 為不定項的多項式，它本身也可被看成一個算子， $g(x)$ 則是非齊次項。求上式的特解就是要找出一個能滿足上式的函數 $f_p(x)$ 。現在如把 $f_p(x)$ 代入上式中的 $f(x)$ ，那麼我們有

$$f_p(x) = -P(\phi)^{-1}g(x) \quad (2)$$

因此如能確定逆算子 $P(\phi)^{-1}$ ，便可求得 $f_p(x)$ 。在初等代數中。若 x 是非零實數，我們有 $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，即 x 的「(乘法) 逆元」等於其「倒數」。把上述等式加以推廣，也有

$$P(\phi)^{-1} = \frac{1}{P(\phi)} \quad (3)$$

即把逆算子(inverse operator) 寫成算子倒數(reciprocal of operator) 的形式。有趣的是，上述算子倒數形式在某些情況下的確有助進行運算，因此以下將使用「算子倒數」以代表「逆算子」。可以證明，上述算子倒數 (亦即逆算子) 具有線性性質。

如同「待定係數法」的情況，只有當 (1) 中的 $g(x)$ 是某些特定函數時，才能用算子倒數求特解。特別地，當 $g(x)$ 是多項式時，可以運用以下解題技巧：先把算子倒數 $-\frac{1}{P(\phi)}$ 因式分解成某個包含因子 $\frac{1}{(I-h(\psi))^m}$ 的乘積，其中 ψ 代表算子 D 或 Δ ，而 $h(\psi)$ 則代表某個以 ψ 作為論元的函數 (在進行改寫時可能要利用關係式 $E = \Delta + I$)。接著利用「廣義二項式定理」(generalized binomial theorem) 把上述因子改寫成以下無窮級數：

$$\frac{1}{(I-h(\psi))^m} = I + mh(\psi) + \frac{m(m+1)}{2!}h(\psi)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}h(\psi)^3 + \dots \quad (4)$$

然後把上述無窮級數連同 $-\frac{1}{P(\phi)}$ 的其他因子依次作用於 $g(x)$ 。請注意當 $g(x)$ 是 l 次多項式時，必有 $\psi^{l+1} = \psi^{l+2} = \dots = 0$ ，因此實際只需考慮上述無窮級數中有限個項對 $g(x)$ 的作用結果。在進行完上述作用後，有時還須應用 $\frac{1}{D} = \int$ 或 $\frac{1}{\Delta} = \sum$ 這兩個關係式以求得所需結果。

舉例說，考慮以下 6 階常微分方程：

$$(D^6 + 8D^4 + 16D^2)f(x) - 96x^2 = 0 \quad (5)$$

應用 (2)、(3) 和 (4)，可逐步求得上述方程的特解如下：

$$\begin{aligned} f_p(x) &= -\frac{1}{D^6 + 8D^4 + 16D^2}(-96x^2) \\ &= 96 \times \frac{1}{D^2(D^2 + 4I)^2}(x^2) \\ &= 96 \times \frac{1}{D^2} \times \frac{1}{4^2 \left(I - \left(-\frac{1}{4}D^2\right)\right)^2}(x^2) \\ &= 6 \times \frac{1}{D^2} \left(I - \frac{1}{2}D^2 + \frac{3}{16}D^4 - \dots\right)(x^2) \\ &= 6 \iint (x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \quad (6) \end{aligned}$$

上面第四行應用了 (4) (即把 $m = 2$ 和 $h(\psi) = -\frac{1}{4}D^2$ 代入 (4))。第五行則把無窮級數 $I - \frac{1}{2}D^2 + \frac{3}{16}D^4 - \dots$ 作用於 x^2 (實際只須計算 $(I - \frac{1}{2}D^2)(x^2) = x^2 - 1$ ，因為無窮級數中其他項對 x^2 作用的結果必然都等於 0)，並把 $\frac{1}{D^2}$ 改寫成 $\iint$ 。請注意由於我們的目標是求 (5) 的特解，所以在上面最後一行進行不定積分運算時，無需引入任意常數。

當 $g(x)$ 包含指數函數 e^{ax} 或 a^x 時，還要應用以下定理。

定理 1：設 P 如上定義， $k(x)$ 為函數，則

$$(i) \quad \frac{1}{P(D)}(e^{ax}k(x)) = e^{ax} \times \frac{1}{P(D+aI)}k(x) \quad (7)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{P(E)}(a^xk(x)) = a^x \times \frac{1}{P(aE)}k(x) \quad (8)$$

舉例說，考慮以下 2 階常差分方程：

$$(E^2 - 5E + 6I)f(x) - 4^x(x^2 - x + 5) = 0 \quad (9)$$

應用 (2)、(3)、(4) 和 (8)，可以逐步求得上述方程的特解如下：

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= -\frac{1}{E^2 - 5E + 6I}(-4^x(x^2 - x + 5)) \\
&= 4^x \times \frac{1}{(4E)^2 - 5(4E) + 6I}(x^2 - x + 5) \\
&= 4^x \times \frac{1}{16(\Delta + I)^2 - 20(\Delta + I) + 6I}(x^2 - x + 5) \\
&= 4^x \times \frac{1}{16\Delta^2 + 12\Delta + 2I}(x^2 - x + 5) \\
&= 4^x \times \frac{1}{2(I - (-6\Delta - 8\Delta^2))}(x^2 - x + 5) \\
&= \frac{1}{2} \times 4^x(I + (-6\Delta - 8\Delta^2) + (-6\Delta - 8\Delta^2)^2 + \dots)(x^2 - x + 5) \\
&= \frac{1}{2} \times 4^x(I - 6\Delta + 28\Delta^2 + \dots)(x^2 + 5) \\
&= \frac{1}{2} \times 4^x(x^2 - 12x + 61) \\
&= \frac{1}{2} \times 4^x(x^2 - 13x + 61) \quad (10)
\end{aligned}$$

當 $g(x)$ 包含圓函數 $\cos(ax)$ 或 $\sin(ax)$ 時，可以使用以下等式把 $\cos(ax)$ 和 $\sin(ax)$ 寫成指數函數的形式，並運用「定理 1」：

$$\cos(ax) = \frac{1}{2}e^{iax} + \frac{1}{2}e^{-iax} \quad (11)$$

$$\sin(ax) = -\frac{1}{2}ie^{iax} + \frac{1}{2}ie^{-iax} \quad (12)$$

舉例說，考慮以下 2 階常微分方程：

$$(D^2 - D + I)f(x) + 73\sin(3x) = 0 \quad (13)$$

根據 (2)、(3)、(12) 和算子倒數的線性性質，上述方程的特解具有以下形式：

$$\begin{aligned}
f_p(x, y) &= -\frac{1}{D^2 - D + I}(73\sin(3x)) \\
&= \frac{73i}{2} \times \frac{1}{D^2 - D + I}(e^{i3x}) - \frac{73i}{2} \times \frac{1}{D^2 - D + I}(e^{-i3x}) \quad (14)
\end{aligned}$$

接下來分別求上式中的兩項。對於 (14) 中的第一項，把 e^{i3x} 寫成 $e^{i3x} \times 1$

的形式，然後把 $3i$ 代入 (7) 中的 a ，並進行計算如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{73i}{2} \times \frac{1}{D^2 - D + I} (e^{i3x} \times 1) \\
&= \frac{73i}{2} e^{i3x} \times \frac{1}{(D + 3iI)^2 - (D + 3iI) + I} (1) \\
&= \frac{73i}{2} e^{i3x} \times \frac{1}{D^2 + (-1 + 6i)D - (8 + 3i)I} (1) \\
&= \frac{73i}{2} e^{i3x} \times \frac{1}{-(8 + 3i) \left(I - \frac{(-1 + 6i)D + D^2}{8 + 3i} \right)} (1) \\
&= -\frac{73i}{16 + 6i} e^{i3x} \left(I + \frac{(-1 + 6i)D + D^2}{8 + 3i} + \dots \right) (1) \\
&= -\frac{73i}{16 + 6i} e^{i3x} \\
&= -\frac{73i}{16 + 6i} \times \frac{16 - 6i}{16 - 6i} (\cos(3x) + i \sin(3x)) \\
&= \left(-\frac{3}{2} \cos(3x) + 4 \sin(3x) \right) + i \left(-4 \cos(3x) - \frac{3}{2} \sin(3x) \right) \quad (15)
\end{aligned}$$

運用類似的方法，也可求得 (14) 中的第二項如下：

$$-\frac{73i}{2} \times \frac{1}{D^2 - D + I} (e^{-i3x}) = \left(-\frac{3}{2} \cos(3x) + 4 \sin(3x) \right) + i \left(4 \cos(3x) + \frac{3}{2} \sin(3x) \right) \quad (16)$$

把 (15) 和 (16) 加起來，便得到 (13) 的特解如下：

$$f_p(x) = -3 \cos(3x) + 8 \sin(3x) \quad (17)$$

當 $g(x)$ 由多個函數相乘以成時，便可能要重覆進行前面介紹的計算程序。
舉例說，考慮以下 2 階常差分方程：

$$(E^2 - I)f(x) + 5 \times 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \quad (18)$$

根據 (2)、(3) 和 (8)，上述方程的特解具有以下形式：

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= -\frac{1}{E^2 - I} \left(5 \times 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \\
&= -5 \times 2^x \times \frac{1}{(2E)^2 - I} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \\
&= -5 \times 2^x \times \frac{1}{4E^2 - I} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

我們要對上式再次應用 (8)。為此，用 (11) 把上式改寫為

$$f_p(x) = -\frac{5}{2} \times 2^x \times \frac{1}{4E^2 - I}(e^{\frac{i\pi x}{2}}) - \frac{5}{2} \times 2^x \times \frac{1}{4E^2 - I}(e^{-\frac{i\pi x}{2}}) \quad (19)$$

接下來分別求上式中的兩項。為求 (19) 中的第一項，先把 $e^{\frac{i\pi x}{2}}$ 寫成 $e^{\frac{i\pi x}{2}} \times 1$ 的形式，然後把 $e^{\frac{i\pi}{2}} (= i)$ 代入 (8) 中的 a ，並進行計算如下：

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{2} \times 2^x \times \frac{1}{4E^2 - I}(e^{\frac{i\pi x}{2}} \times 1) \\ = & -\frac{5}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \times \frac{1}{4(iE)^2 - I}(1) \\ = & -\frac{5}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \times \frac{1}{-4(\Delta + I)^2 - I}(1) \\ = & -\frac{5}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \times \frac{1}{-4\Delta^2 - 8\Delta - 5I}(1) \\ = & -\frac{5}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \times \frac{1}{-5(I - (-\frac{8}{5}\Delta - \frac{4}{5}\Delta^2))}(1) \\ = & \frac{1}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \left(I + \left(-\frac{8}{5}\Delta - \frac{4}{5}\Delta^2 \right) + \dots \right) (1) \\ = & \frac{1}{2} \times 2^x e^{\frac{i\pi x}{2}} \\ = & \frac{1}{2} \times 2^x \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \quad (20) \end{aligned}$$

運用類似的方法，也可求得 (19) 中的第二項如下：

$$-\frac{5}{2} \times 2^x \times \frac{1}{4E^2 - I}(e^{-\frac{i\pi x}{2}}) = \frac{1}{2} \times 2^x \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \quad (21)$$

把 (20) 和 (21) 加起來，便得到 (18) 的特解如下：

$$f_p(x) = 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (22)$$

算子倒數也可用來求解某些常係數非齊次偏微分／差分方程，這種方程可以寫成以下一般形式：

$$P(\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_m})f(x_1, \dots, x_m) + g(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (23)$$

在上式中， ϕ_{x_i} 代表關於 x_i ($1 \leq i \leq m$) 的偏導數／移位算子， $P(\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_m})$ 代表以 ϕ_{x_1} 、...、 ϕ_{x_m} 為不定項的 m 元多項式。有意思的是，前面介紹有關求解常微分／差分方程的概念和技巧可以推廣至偏微分／差分方程，例如

(2)、(3) 和 (4) 和各個關係式便適用於偏微分／差分方程，只需把其中的 x 改為 x_1 、...、 x_m ，並把各個算子 ϕ 、 ψ 、 D 、 E 、 Δ 、 $\int$ 、 Σ 改為關於 x_1 、...、 x_m 的相應算子便可。

當 (23) 中的 $g(x_1, \dots, x_m)$ 是 m 元多項式時，可以沿用前面介紹的把算子倒數因式分解並把其某個因子改寫成無窮級數的技巧。舉例說，考慮以下 2 階 2 元偏微分方程：

$$((D_x)^2 - 6D_x D_y + 9(D_y)^2)f(x, y) - 12x^2 - 36xy = 0 \quad (24)$$

應用 (2)、(3) 和 (4)，可逐步求得上述方程的特解如下：

$$\begin{aligned} f_p(x, y) &= -\frac{1}{(D_x)^2 - 6D_x D_y + 9(D_y)^2}(-12x^2 - 36xy) \\ &= 12 \times \frac{1}{(D_x - 3D_y)^2}(x^2 + 3xy) \\ &= 12 \times \frac{1}{(D_x)^2 \left(I - \frac{3D_y}{D_x}\right)^2}(x^2 + 3xy) \\ &= 12 \times \frac{1}{(D_x)^2} \times \left(I + \frac{6D_y}{D_x} + \frac{27(D_y)^2}{(D_x)^2} + \dots\right)(x^2 + 3xy) \\ &= \frac{12I}{(D_x)^2}(x^2 + 3xy) + \frac{72D_y}{(D_x)^3}(x^2 + 3xy) + \frac{324(D_y)^2}{(D_x)^4}(x^2 + 3xy) + \dots \\ &= 12 \int_x \int_x (x^2 + 3xy) + 72 \int_x \int_x \int_x 3x \\ &= 10x^4 + 6x^3y \quad (25) \end{aligned}$$

上面第五行應用了算子倒數類似分數的特殊性質，把 $\frac{1}{(D_x)^2}$ 的「分母」與其後括號中各項的「分母」逐一相乘。接下來把這些分數中的「分子」和「分母」分別作用於其後的多項式，其中「分子」代表某種偏導數運算，「分母」則代表某種不定積分運算。

當 $g(x_1, \dots, x_m)$ 包含指數函數 $e^{a_1x_1+\dots+a_mx_m}$ 或 $a_1^{x_1} \times \dots \times a_m^{x_m}$ 時，要應用「定理 1」的以下推廣形式。

定理 2： 設 P 如上定義， $k(x_1, \dots, x_m)$ 為函數，則

(i)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(D_{x_1}, \dots, D_{x_m})}(e^{a_1x_1+\dots+a_mx_m} \times k(x_1, \dots, x_m)) \\ &= e^{a_1x_1+\dots+a_mx_m} \times \frac{1}{P(D_{x_1}+a_1I, \dots, D_{x_m}+a_mI)}k(x_1, \dots, x_m) \quad (26) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P(E_{x_1}, \dots, E_{x_m})} (a_1^{x_1} \times \dots \times a_m^{x_m} \times k(x_1, \dots, x_m)) \\ &= a_1^{x_1} \times \dots \times a_m^{x_m} \times \frac{1}{P(a_1 E_{x_1}, \dots, a_m E_{x_m})} k(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (27)$$

舉例說，考慮以下 x 和 y 的階俱為 1 的 2 元偏差分方程：

$$(E_x E_y + I)f(x, y) + 14 \times 2^x 3^y - 2x^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \quad (28)$$

根據 (2)、(3) 和算子倒數的線性性質，上述方程的特解具有以下形式：

$$\begin{aligned} f_p(x, y) &= -\frac{1}{E_x E_y + I} (14 \times 2^x 3^y - 2x^2 - 2x - 2y - 2) \\ &= \frac{1}{E_x E_y + I} (-14 \times 2^x 3^y) + \frac{1}{E_x E_y + I} (2x^2 + 2x + 2y + 2) \end{aligned} \quad (29)$$

接下來分別求上式中的兩項。為求 (29) 中的第一項，先把 $-14 \times 2^x 3^y$ 改寫成 $-2^x 3^y \times 14$ ，然後應用 (27) 並計算如下：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_x E_y + I} (-2^x 3^y \times 14) \\ &= -2^x 3^y \times \frac{1}{(2E_x)(3E_y) + I} (14) \\ &= -2^x 3^y \times \frac{1}{6(\Delta_x + I)(\Delta_y + I) + I} (14) \\ &= -2^x 3^y \times \frac{1}{6\Delta_x \Delta_y + 6\Delta_x + 6\Delta_y + 7I} (14) \\ &= -2^x 3^y \times \frac{1}{7 \left(I - \left(-\frac{6\Delta_x}{7} - \frac{6\Delta_y}{7} - \frac{6\Delta_x \Delta_y}{7} \right) \right)} (14) \\ &= -\frac{1}{7} \times 2^x 3^y \left(I + \left(-\frac{6\Delta_x}{7} - \frac{6\Delta_y}{7} - \frac{6\Delta_x \Delta_y}{7} \right) + \dots \right) (14) \\ &= -2 \times 2^x 3^y \quad (30) \end{aligned}$$

為求 (29) 中的第二項，進行計算如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E_x E_y + I} (2x^2 + 2x + 2y + 2) \\
= & 2 \times \frac{1}{(\Delta_x + I)(\Delta_y + I) + I} (x^2 + x + y + 1) \\
= & 2 \times \frac{1}{\Delta_x \Delta_y + \Delta_x + \Delta_y + 2I} (x^2 + x + y + 1) \\
= & 2 \times \frac{1}{2 \left(I - \left(-\frac{\Delta_x}{2} - \frac{\Delta_y}{2} - \frac{\Delta_x \Delta_y}{2} \right) \right)} (x^2 + x + y + 1) \\
= & \left(I + \left(-\frac{\Delta_x}{2} - \frac{\Delta_y}{2} - \frac{\Delta_x \Delta_y}{2} \right) + \left(-\frac{\Delta_x}{2} - \frac{\Delta_y}{2} - \frac{\Delta_x \Delta_y}{2} \right)^2 + \dots \right) (x^2 + x + y + 1) \\
= & \left(I - \frac{\Delta_x}{2} - \frac{\Delta_y}{2} + \frac{(\Delta_x)^2}{4} + \dots \right) (x^2 + 2x + y + 1) \\
= & x^2 + x + y \\
= & x^2 + y \quad (31)
\end{aligned}$$

把 (30) 和 (31) 加起來，便得到 (28) 的特解如下：

$$f_p(x) = -2 \times 2^x 3^y + x^2 + y \quad (32)$$

當 $g(x_1, \dots, x_m)$ 包含圓函數 $\cos(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m)$ 或 $\sin(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m)$ 時，可以沿用前面的做法，把 $\cos(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m)$ 或 $\sin(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m)$ 寫成指數函數的形式（為此可以運用 (11) 或 (12)，但要把其中的 ax 改為 $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$ ），並運用「定理 2」。

舉例說，考慮以下 2 階 2 元偏微分方程：

$$(D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I)f(x, y) + 30 \cos(3x + 4y) - 10 \sin(3x + 4y) = 0 \quad (33)$$

根據 (2)、(3)、(11)、(12) 和算子倒數的線性性質，上述方程的特解具有以下形式：

$$\begin{aligned}
f_p(x, y) &= -\frac{1}{D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I} (30 \cos(3x + 4y) - 10 \sin(3x + 4y)) \\
&= (-15 - 5i) \times \frac{1}{D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I} (e^{i(3x+4y)}) \\
&\quad + (-15 + 5i) \times \frac{1}{D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I} (e^{-i(3x+4y)}) \quad (34)
\end{aligned}$$

接下來分別求上式中的兩項。為求 (34) 中的第一項，先把 $e^{i(3x+4y)}$ 寫成 $e^{i(3x+4y)} \times 1$ 的形式，然後應用 (26) 並計算如下：

$$\begin{aligned}
& (-15 - 5i) \times \frac{1}{D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I} (e^{i(3x+4y)} \times 1) \\
= & (-15 - 5i) e^{i(3x+4y)} \times \frac{1}{(D_x + 3iI)(D_y + 4iI) + 2(D_x + 3iI) - (D_y + 4iI) - 2I} \quad (1) \\
= & (-15 - 5i) e^{i(3x+4y)} \times \frac{1}{D_x D_y + (2 + 4i)D_x + (-1 + 3i)D_y + (-14 + 2i)I} \quad (1) \\
= & (-15 - 5i) e^{i(3x+4y)} \times \frac{1}{(-14 + 2i) \left(I - \left(-\frac{(2+4i)D_x}{-14+2i} - \frac{(-1+3i)D_y}{-14+2i} - \frac{D_x D_y}{-14+2i} \right) \right)} \quad (1) \\
= & \frac{-15 - 5i}{-14 + 2i} e^{i(3x+4y)} \left(I + \left(-\frac{(2 + 4i)D_x}{-14 + 2i} - \frac{(-1 + 3i)D_y}{-14 + 2i} - \frac{D_x D_y}{-14 + 2i} \right) + \dots \right) \quad (1) \\
= & \frac{-15 - 5i}{-14 + 2i} e^{i(3x+4y)} \\
= & \frac{-15 - 5i}{-14 + 2i} \times \frac{-14 - 2i}{-14 - 2i} (\cos(3x + 4y) + i \sin(3x + 4y)) \\
= & \left(\cos(3x + 4y) - \frac{1}{2} \sin(3x + 4y) \right) + i \left(\frac{1}{2} \cos(3x + 4y) + \sin(3x + 4y) \right) \quad (35)
\end{aligned}$$

運用類似的方法，也可求得 (34) 中的第二項如下：

$$\begin{aligned}
& (-15 + 5i) \times \frac{1}{D_x D_y + 2D_x - D_y - 2I} (e^{-i(3x+4y)}) \\
= & \left(\cos(3x + 4y) - \frac{1}{2} \sin(3x + 4y) \right) + i \left(-\frac{1}{2} \cos(3x + 4y) - \sin(3x + 4y) \right) \quad (36)
\end{aligned}$$

把 (35) 和 (36) 加起來，便得到 (33) 的特解如下：

$$f_p(x) = 2 \cos(3x + 4y) - \sin(3x + 4y) \quad (37)$$

以上討論的都是涉及 2 元函數的例子，以下讓我們看一個涉及 4 元函數的例子，請看以下 x 、 y 、 z 和 w 的階俱為 1 的 4 元偏差分方程：

$$(E_x - E_y + E_z - E_w)f(x, y, z, w) - x - y - z - w = 0 \quad (38)$$

根據 (2)、(3) 和算子倒數的線性性質，上述方程的特解具有以下形式：

$$\begin{aligned}
& f_p(x, y, z, w) \\
&= -\frac{1}{E_x - E_y + E_z - E_w}(-x - y - z - w) \\
&= \frac{1}{(\Delta_x + I) - (\Delta_y + I) + (\Delta_z + I) - (\Delta_w + I)}(x + y + z + w) \\
&= \frac{1}{\Delta_x \left(I - \frac{\Delta_y}{\Delta_x} + \frac{\Delta_z}{\Delta_x} - \frac{\Delta_w}{\Delta_x} \right)}(x + y + z + w) \\
&= \frac{1}{\Delta_x} \times \left(I + \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} - \frac{\Delta_z}{\Delta_x} + \frac{\Delta_w}{\Delta_x} \right) + \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} - \frac{\Delta_z}{\Delta_x} + \frac{\Delta_w}{\Delta_x} \right)^2 + \dots \right) (x + y + z + w) \\
&= \frac{1}{\Delta_x}(x + y + z + w) + \frac{\Delta_y}{(\Delta_x)^2}(x + y + z + w) \\
&\quad - \frac{\Delta_z}{(\Delta_x)^2}(x + y + z + w) + \frac{\Delta_w}{(\Delta_x)^2}(x + y + z + w) \\
&= \sum_x (x + y + z + w) + \sum_x \sum_x 1 - \sum_x \sum_x 1 + \sum_x \sum_x 1 \\
&= \frac{x^2}{2} + xy + xz + xw + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \\
&= x^2 - x + xy + xz + xw \quad (39)
\end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁