

## 數學示例：偏微／差分與重積／和分

我們在《數學示例：微分與差分》和《數學示例：積分與和分》中介紹了一元函數的微分、差分、積分、和分等概念。本文主旨是把這些概念推廣到多元函數。設  $f$  為以  $x = (x_1, \dots, x_n)$  作為變項的  $n$  元函數，則  $f$  關於  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 的偏導數(partial derivative)，以下記作  $D_{x_i}f$ ，也是一個函數，其定義如下：

$$D_{x_i}f(x) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h_i} \quad (1)$$

我們可以這樣理解偏導數：把某個多元函數  $f(x)$  的  $x_i$  以外的變項全部當作常數後， $f$  便相當於一個僅以  $x_i$  作為變項的一元函數，這樣偏導數算子  $D_{x_i}$  便相當於一元函數的導數算子  $D$ 。從以上討論可以看到，給定一個  $n$  元函數，我們有  $n$  個偏導數  $D_{x_1}f$ 、...、 $D_{x_n}f$ 。

正如一元函數的情況，原則上也可以定義關於變項  $x_i$  的「偏微分」算子。不過，這種算子的用途不大，這裡不予介紹<sup>1</sup>。較有用的是全微分(total differential)算子。設  $f$  為如上定義的函數， $h_i$  為給定實數，代表  $x_i$  的變化幅度，則  $f$  的全微分，以下記作  $df$ ，也是一個函數，其定義如下(請把下式與《數學示例：微分與差分》中的(2)比較，請注意「多元函數的全微分」與「一元函數的微分」有相同的符號)：

$$df(x) = D_{x_1}f(x) \times h_1 + \dots + D_{x_n}f(x) \times h_n \quad (2)$$

從上式可見，全微分反映函數  $f$  關於所有變項的變化，而非只某個變項的變化。

正如一元函數有「差分」和「移位」這兩種算子，多元函數也有相對應的算子。設  $f$  和  $h_i$  如上定義，則  $f$  關於  $x_i$  的偏差分(partial difference)，以下記作  $\Delta_{x_i}f$ ，也是一個函數，其定義如下：

$$\Delta_{x_i}f(x) = f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (3)$$

<sup>1</sup>跟一元函數的情況相似，「偏微分」一詞有歧義，既可以指上述這種沒有多大用途的算子，也可以指求偏導數的運算。

而  $f$  關於  $x_i$  的**偏移位**(partial shift), 以下記作  $E_{x_i}f$ , 也是一個函數, 其定義如下:

$$E_{x_i}f(x) = f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) \quad (4)$$

比較 (3) 和 (4), 可得算子  $\Delta_{x_i}$  與  $E_{x_i}$  的關係如下:

$$\Delta_{x_i} = E_{x_i} - I \quad (5)$$

容易看到上述四類算子 (即  $D_{x_i}$ 、 $d$ 、 $\Delta_{x_i}$  和  $E_{x_i}$ ) 都具有線性性質。

接下來讓我們看一個實例, 設有以下二元函數 (以下用  $h$  和  $k$  分別代表變項  $x$  和  $y$  的變化幅度):

$$f(x, y) = e^x y^3 \quad (6)$$

根據數學分析的知識, 我們有

$$D_x f(x, y) = e^x y^3 \quad (7)$$

$$D_y f(x, y) = 3e^x y^2 \quad (8)$$

由此根據 (2), 可得

$$df(x) = e^x y^3 h + 3e^x y^2 k \quad (9)$$

另一方面, 根據 (3) 和 (4), 可求得

$$\begin{aligned} \Delta_x f(x, y) &= f(x + h, y) - f(x, y) \\ &= e^{x+h} y^3 - e^x y^3 \\ &= e^x y^3 (e^h - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_y f(x, y) &= f(x, y + k) \\ &= e^x (y + k)^3 \end{aligned} \quad (11)$$

在進行上述四類算子的具體運算時, 可以沿用《數學示例: 微分/差分運算法則》中介紹的初等函數的微分/差分表和各種微分/差分運算法則。

在多元函數微積分中, 同樣有二階偏導數的概念, 此即進行兩次偏微分運算的結果。我們把二階偏導數算子記作  $D_{x_i x_j}$ , 其定義如下:

$$D_{x_i x_j} f = D_{x_j} (D_{x_i} f) \quad (12)$$

請注意在上式中,  $x_i$  和  $x_j$  在等號左右兩端以相反次序出現, 這即是說當我們把  $D_{x_i x_j}$  算子作用於  $f$  時, 相等於先把  $D_{x_i}$  作用於  $f$ , 然後再把  $D_{x_j}$  作

用於  $D_{x_i}f$ 。為簡便起見，也可以把二階偏導數算子寫成一階偏導數算子的乘積或幕次，即我們有

$$D_{x_i x_j} = D_{x_j} D_{x_i}, \quad D_{x_i x_i} = (D_{x_i})^2 \quad (13)$$

由於  $x_i$  和  $x_j$  可以是不同的變項，這裡有一個  $D_{x_i x_j}$  是否等於  $D_{x_j x_i}$  的問題，以下定理提供這個問題的答案。

**定理 1 (克萊羅定理 Clairaut's Theorem)**：設  $f$  如上定義，並且在某個包含點  $p = (p_1, \dots, p_n)$  的開集  $U$  上， $D_{x_i x_j} f$  和  $D_{x_j x_i} f$  都是連續函數 (其中  $1 \leq i, j \leq n$ )，則

$$D_{x_i x_j} f(p) = D_{x_j x_i} f(p) \quad (14)$$

由於我們討論的函數都是其定義域上的光滑函數，所以以下假設 (14) 在通常情況下成立。

類似地，就其餘三個算子也可推導出相應的二階算子，以下用  $d^2$  代表二階全微分算子，用  $\Delta_{x_i x_j}$  和  $E_{x_i x_j}$  分別代表二階偏差分和二階偏移位算子 (有時也可以幕次的形式表示)。其中的二階偏差分和二階偏移位算子不涉及極限運算，因此根據其定義，可知它們對任何函數  $f$ ，都滿足類似 (14) 的公式：

$$\Delta_{x_i x_j} f = \Delta_{x_j x_i} f \quad (15)$$

$$E_{x_i x_j} f = E_{x_j x_i} f \quad (16)$$

根據上述定義，可以推導出某些二階算子的一般公式，例如以下便是  $d^2$  算子的推導過程 (在以下計算中，要應用上述四類算子的線性性質，並運用 (14))：

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= d(df(x)) \\ &= d(D_{x_1} f(x) \times h_1 + \dots + D_{x_n} f(x) \times h_n) \\ &= D_{x_1}(D_{x_1} f(x) \times h_1 + \dots + D_{x_n} f(x) \times h_n) \times h_1 + \\ &\quad \dots + D_{x_n}(D_{x_1} f(x) \times h_1 + \dots + D_{x_n} f(x) \times h_n) \times h_n \\ &= (D_{x_1})^2 f(x) \times h_1^2 + \dots + (D_{x_n})^2 f(x) \times h_n^2 + \\ &\quad \dots + 2D_{x_1 x_2} f(x) \times h_1 h_2 + \dots + 2D_{x_{n-1} x_n} f(x) \times h_{n-1} h_n \end{aligned} \quad (17)$$

此外， $\Delta_{x_i x_j}$  和  $E_{x_i x_j}$  的一般公式在  $i = j$  和  $i \neq j$  這兩種情況下會有所不同，這裡不作討論。

我們還可以進一步就上述四類算子推導出一般的  $n$  階算子 (其中  $n$  是自然數)。像二階算子一樣， $n$  階算子有時可以寫成幕次的形式，例如四階

移位算子  $E_{xxxy}$  便可以寫成  $E_y(E_x)^3$ 。此外，也可以把前面的 (14)、(15) 和 (16) 推廣到  $n$  階算子。舉例說，如果  $1 \leq i, j, k \leq n$ ，那麼我們有

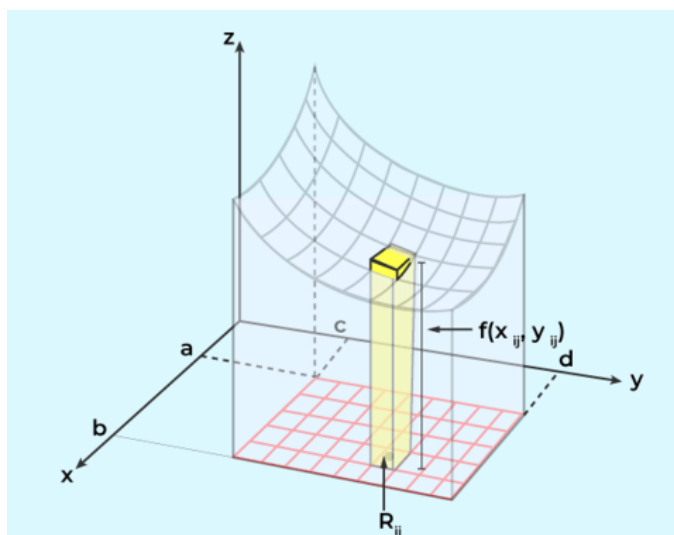
$$E_{x_i x_j x_k} f = E_{x_i x_k x_j} f = E_{x_j x_i x_k} f = E_{x_j x_k x_i} f = E_{x_k x_i x_j} f = E_{x_k x_j x_i} f$$

我們在《數學示例：微分與差分》中曾指出，一元函數的微分  $df(x)$  可被看成對差分  $\Delta f(x)$  的線性逼近。同樣，多元函數的全微分  $df(x)$  也可被看成對以下數值的線性逼近<sup>2</sup>：

$$(E_{x_1 \dots x_n} - I)f(x) = f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \quad (18)$$

舉例說，設我們沿用 (6) 中的函數  $f(x, y)$ ，並設  $x = 4$ 、 $y = 5$ 、 $h = k = 0.01$ 。那麼從  $f(4, 5)$  到  $f(4.01, 5.01)$  的變化幅度可用 (18) 計算如下： $(E_{xy} - I)f(4, 5) = e^{4.01} \times 5.01^3 - e^4 \times 5^3 \approx 110.033$ 。接著用 (9) 計算  $df(4, 5)$  如下： $df(4, 5) = e^4 \times 5^3 \times 0.01 + 3 \times e^4 \times 5^2 \times 0.01 \approx 109.196$ 。由於  $(E_{xy} - I)f(4, 5) - df(4, 5) \approx 0.837$ ，這是一個不算大的差別，由此可見  $df(4, 5)$  的確可用來逼近  $(E_{xy} - I)f(4, 5)$ 。

把定積分概念推廣到多元函數，便會得到**重積分**(multiple integral) 的概念，我們先從「二重積分」(double integral) 說起。正如定積分可用來求面積，二重積分可用來求體積。設  $f$  為在長方形範圍  $[a, b] \times [c, d]$  內有定義的連續二元函數，這個函數在空間上的圖象呈現為一個曲面。假設在上述長方形範圍內， $f(x, y) \geq 0$ ，現欲求這個曲面、 $x$ - $y$  平面、 $x = a$  平面、 $x = b$  平面、 $y = c$  平面和  $y = d$  平面所圍封立體 (即下圖所示曲面立體) 的體積：



<sup>2</sup>把 (18) 左端跟 (5) 右端比較，可不妨把 (18) 中的  $E_{x_1 \dots x_n} - I$  稱為「全差分」算子。惟請注意， $E_{x_1 \dots x_n} - I \neq \Delta_{x_1 \dots x_n}$ 。

現把  $[a, b] \times [c, d]$  等分為  $n \times m$  個小長方形，每個小長方形的面積為  $hk$ ，其中  $h = \frac{b-a}{n}$ ， $k = \frac{d-c}{m}$ ，每個小長方形左下角的坐標為  $(a + ih, c + jk)$  (其中  $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1$ )<sup>3</sup>。對應每個小長方形左下角的坐標都有一個函數值  $f(a + ih, c + jk)$ ，把這個函數值乘以小長方形的面積  $hk$  所得結果，即  $f(a + ih, c + jk)hk$ ，等於上圖中黃色長方體的體積。如果把這些長方體體積加起來，所得總體積可被看成上圖中曲面立體體積的近似值，我們把這個近似值寫成以下「二重黎曼和」(double Riemann sum)：

$$\begin{aligned} & S(f, a, b, c, d, n, m) \\ &= f(a, c)hk + f(a + h, c)hk + \dots + f(a + (n-1)h, c)hk \\ & \quad + f(a, c + k)hk + f(a + h, c + k)hk + \dots + f(a + (n-1)h, c + k)hk + \\ & \quad \dots \\ & \quad + f(a, c + (m-1)k)hk + f(a + h, c + (m-1)k)hk + \\ & \quad \dots + f(a + (n-1)h, c + (m-1)k)hk \quad (19) \end{aligned}$$

現在如果把  $n$  和  $m$  不斷增大 (亦即把  $h$  和  $k$  不斷縮小)，上述的  $S(f, a, b, c, d, n, m)$  便會越來越逼近上圖中曲面立體的體積，我們把這個極限值稱為「 $f$  關於  $[a, b] \times [c, d]$  的二重積分」，以下記作  $\int_{[a,b] \times [c,d]} f$ ，即

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \lim_{n,m \rightarrow \infty} S(f, a, b, c, d, n, m) \quad (20)$$

如用上式計算所需體積，要進行求和及求極限運算，頗為繁複。但幸好多元函數微積分中，我們有以下定理。

**定理 2 (富比尼定理 Fubini's Theorem)**：設  $f$  為以  $x$  和  $y$  作為變項的連續二元函數，則

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=c}^{y=d} f \right) = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=a}^{x=b} f \right) \quad (21)$$

由於我們討論的函數都是其定義域上的光滑函數，所以以下假設 (21) 在通常情況下成立。

在上式中， $\int_{x=a}^{x=b}$  代表把  $f$  的  $x$  以外的變項當作常數的情況下進行定積分運算的算子，而  $\int_{y=c}^{y=d}$  則代表把  $f$  的  $y$  以外的變項當作常數的情況下進行定積分運算的算子，因此可分別稱為  $f$  關於  $x$  和關於  $y$  的「偏積分」算子 (其運算原理跟「偏導數」算子相似)。上述定理是說，可以透過連續進

<sup>3</sup> 上圖把坐標  $(a + ih, c + jk)$  記作  $(x_{ij}, y_{ij})$ ，並且把左下角坐標為  $(x_{ij}, y_{ij})$  的小長方形記作  $R_{ij}$ 。

行兩次關於不同變項的「偏積分」運算來計算二重積分，而且該兩次「偏積分」運算可以對調次序而不影響結果，上述連續進行的「偏積分」運算又稱「迭代積分」(iterated integral)。此外，在進行偏積分運算時，可以沿用「微積分基本定理」以及《數學示例：積分／和分運算法則》中介紹的初等函數的積分表和積分運算法則。

以 (6) 中的  $f(x, y)$  為例，設要求  $\int_{[0,4] \times [0,5]} f$ ，可以先對  $f$  進行關於  $y$  的「偏積分」運算如下：

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=5} e^x y^3 &= \left[ \frac{e^x y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=5} \\ &= \frac{625}{4} e^x \end{aligned}$$

接著對上述結果進行關於  $x$  的「偏積分」運算如下 (由於上述結果只包含  $x$  這個變項，此一「偏積分」運算實際等於普通一元函數的定積分運算)：

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=4} \frac{625}{4} e^x &= \left[ \frac{625}{4} e^x \right]_{x=0}^{x=4} \\ &= \frac{625}{4} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

由此求得

$$\int_{[0,4] \times [0,5]} f = \frac{625}{4} (e^4 - 1) \quad (22)$$

讀者請自行驗證，如果先對  $f$  進行關於  $x$  的「偏積分」運算，然後對所得結果進行關於  $y$  的「偏積分」運算，可得到相同結果。

把定和分概念推廣到多元函數，便會得到**重和分**(multiple sum) 的概念，我們先從「二重和分」(double sum) 說起。設  $f$  為在  $(a, c)$ 、 $(a+h, c)$ 、 $\dots$ 、 $(a+(n-1)h, c)$ 、 $(a, c+k)$ 、 $(a+h, c+k)$ 、 $\dots$ 、 $(a+(n-1)h, c+k)$ 、 $\dots$ 、 $(a, c+(m-1)k)$ 、 $(a+h, c+(m-1)k)$ 、 $\dots$ 、 $(a+(n-1)h, c+(m-1)k)$  點處有定義的二元函數，則「 $f$  關於以上各點的二重和分」，以下記作  $\sum_{(a,c)}^{(a+(n-1)h, c+(m-1)k)} f$ ，定義如下：

$$\begin{aligned} \sum_{(a,c)}^{(a+(n-1)h, c+(m-1)k)} f &= f(a, c) + f(a+h, c) + \dots + f(a+(n-1)h, c) \\ &\quad + f(a, c+k) + f(a+h, c+k) + \dots + f(a+(n-1)h, c+k) + \\ &\quad \dots \\ &\quad + f(a, c+(m-1)k) + f(a+h, c+(m-1)k) + \\ &\quad \dots + f(a+(n-1)h, c+(m-1)k) \quad (23) \end{aligned}$$

比較上式與 (19)，可以看到 (19) 所示的「二重黎曼和」其實是把上式乘以  $hk$  的結果。

由於二重和分不涉及極限運算，因此根據其定義，可知此一運算對任何函數  $f$ ，都滿足類似 (21) 的公式：

$$\sum_{(a,c)}^{(a+(n-1)h, c+(m-1)k)} f = \sum_{x=a}^{x=a+(n-1)h} \left( \sum_{y=c}^{y=c+(m-1)k} f \right) = \sum_{y=c}^{y=c+(m-1)k} \left( \sum_{x=a}^{x=a+(n-1)h} f \right) \quad (24)$$

在上式中， $\sum_{x=a}^{x=a+(n-1)h}$  代表把  $f$  的  $x$  以外的變項當作常數的情況下進行定和分運算的算子，而  $\sum_{y=c}^{y=c+(m-1)k}$  則代表把  $f$  的  $y$  以外的變項當作常數的情況下進行定和分運算的算子，因此可分別稱為  $f$  關於  $x$  和關於  $y$  的「偏和分」算子 (其運算原理跟「偏差分」算子相似)。上式是說，可以透過連續進行兩次關於不同變項的「偏和分」運算來計算二重和分，而且該兩次「偏和分」運算可以對調次序而不影響結果，上述連續進行的「偏和分」運算又稱「迭代和分」(iterated sum)。此外，在進行偏和分運算時，可以沿用「差和分基本定理」以及《數學示例：積分／和分運算法則》中介紹的初等函數的和分表和和分運算法則。

舉例說，考慮二元函數

$$f(x, y) = 2^x - 6y \quad (25)$$

設要求  $\sum_{(1,1)}^{(n,m)} f$ ，這相當於把 (24) 左端的  $f$  定為  $2^x - 6y$ ，並且把  $a$ 、 $c$ 、 $h$  和  $k$  全都定為 1。我們可以先對  $f$  進行關於  $y$  的「偏和分」運算如下：

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^{y=m} (2^x - 6y) &= [2^x y - 3y(y-1)]_{y=1}^{y=m+1} \\ &= m2^x - 3m(m+1) \end{aligned}$$

接著對上述結果進行關於  $x$  的「偏和分」運算如下 (由於上述結果只包含  $x$  這個變項，此一「偏和分」運算實際等於普通一元函數的定和分運算)：

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{x=n} (m2^x - 3m(m+1)) &= [m2^x - 3m(m+1)x]_{x=1}^{x=n+1} \\ &= 2m(2^n - 1) - 3nm(m+1) \end{aligned}$$

由此求得

$$\sum_{(1,1)}^{(n,m)} f = 2m(2^n - 1) - 3nm(m+1) \quad (26)$$

讀者請自行驗證，如果先對  $f$  進行關於  $x$  的「偏和分」運算，然後對所得結果進行關於  $y$  的「偏和分」運算，可得到相同結果。為驗證上述結果，不妨設定  $n = 3$  和  $m = 4$ 。一方面，根據  $\sum$  符號的定義，可直接求這個二元和分如下：

$$\begin{aligned} \sum_{(1,1)}^{(3,4)} f &= 2 - 6 + 2 - 12 + 2 - 18 + 2 - 24 \\ &\quad + 4 - 6 + 4 - 12 + 4 - 18 + 4 - 24 \\ &\quad + 8 - 6 + 8 - 12 + 8 - 18 + 8 - 24 \\ &= -124 \end{aligned}$$

另一方面，把  $n = 3$  和  $m = 4$  代入 (26)，可求得

$$\begin{aligned} \sum_{(1,1)}^{(3,4)} f &= 2 \times 4 \times (2^3 - 1) - 3 \times 3 \times 4 \times (4 + 1) \\ &= -124 \end{aligned}$$

以上兩個計算結果互相一致。

我們還可以進一步考慮「 $n$  重積分」和「 $n$  重和分」(其中  $n$  是大於 1 的自然數)，而且當有關函數符合條件，而積分範圍是  $n$  個有限區間的笛卡爾積，或者和分的上下限是有限有序  $n$  元組時，可以把前面的 (21) 和 (24) 推廣到這些積分/和分。舉例說，對於連續三元函數  $f(x, y, z)$ ，我們有(下式略去積分範圍，僅在「偏積分」符號的下方標出該「偏積分」所關乎的變項)：

$$\int_{(x,y,z)} f = \int_x \int_y \int_z f = \int_x \int_z \int_y f = \int_y \int_x \int_z f = \int_y \int_z \int_x f = \int_z \int_x \int_y f = \int_z \int_y \int_x f$$

惟請注意，如有關  $n$  重積分/和分的積分範圍/上下限不符合上述規定，則未必可以把 (21) 和 (24) 推廣到這些積分/和分。在某些情況下，仍可把  $n$  重積分/和分化為「迭代偏積分/和分」，並且可以對調某些「偏積分/和分」的次序，但要更改某些「偏積分/和分」的積分範圍/上下限。在某些情況下(特別是涉及廣義積分或無窮級數的情況)，更不能隨意調動「偏積分/和分」的次序，本文不擬討論這些複雜情況。

以上介紹的「偏積分/和分」和「 $n$  重積分/和分」都是「定積分」的推廣。現在的問題是，是否可以把「不定積分」也推廣為「不定偏積分/和分」和「 $n$  重不定積分/和分」？我們知道，「不定積分/和分」是「微分/差分」的逆運算。由於「偏微分/差分」以及「 $n$  重偏微分/差分」也有其

逆運算，根據類推原則，可以把這兩類逆運算分別看成「不定偏積分／和分」和「 $n$ 重不定積分／和分」。由於進行「逆運算」有時可被看成「解方程」的過程，上述「不定偏積分／和分」和「 $n$ 重不定積分／和分」運算確會出現於求解某些「多元微分／差分方程」的過程中。

以 (6) 中的  $f(x, y)$  為例，設我們要找出一個  $F(x, y)$  使得  $D_y D_x F(x, y) = f(x, y)$ ，亦即求解以下二元微分方程：

$$D_y D_x F(x, y) = e^x y^3 \quad (27)$$

現在如把  $D_y$  和  $D_x$  的逆運算 (分別記作  $\int_y$  和  $\int_x$ ) 依次作用於上式左右兩端，那麼上述方程的解  $F(x, y)$  可以寫成

$$F(x, y) = \int_x \int_y e^x y^3 \quad (28)$$

在上式中， $\int_x$  代表把  $f$  的  $x$  以外的變項當作常數的情況下進行不定積分運算的算子，而  $\int_y$  則代表把  $f$  的  $y$  以外的變項當作常數的情況下進行不定積分運算的算子，因此可分別被看成關於  $x$  和  $y$  的「不定偏積分」算子，而  $\int_x \int_y$  則可被看成「二重不定積分」算子 (儘管一般不使用這些名稱)。惟請注意，由於這裡涉及兩個論元  $x$  和  $y$ ，進行不定積分運算的結果會包含「任意函數」而非「任意常數」。以上式為例，以下是進行「二重不定積分」的運算過程：

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_x \int_y e^x y^3 \\ &= \int_x \left( \frac{1}{4} e^x y^4 + g_1(x) \right) \\ &= \frac{1}{4} e^x y^4 + \int_x g_1(x) + h_1(y) \\ &= \frac{1}{4} e^x y^4 + g_2(x) + h_1(y) \quad (29) \end{aligned}$$

在上面第二行，進行關於  $y$  的「不定偏積分」運算的結果包含一個  $x$  的任意函數  $g_1(x)$ ，這是因為對一個只包含  $x$  而不含  $y$  的函數 (例如  $\sqrt{\cos(x^2)}$ ) 進行  $D_y$  運算的結果必然是 0。同理，在上面第三行，進行關於  $x$  的「不定偏積分」運算的結果包含一個  $y$  的任意函數  $h_1(y)$ 。最後，由於對  $x$  的任意函數  $g_1(x)$  進行關於  $x$  的「不定偏積分」運算，其結果是  $x$  的另一個任意函數，所以可以用較簡單的  $g_2(x)$  代替  $\int_x g_1(x)$ 。讀者請自行驗證，把  $x$  的任何具體函數和  $y$  的任何具體函數分別代入 (29) 中的  $g_2(x)$  和  $h_1(y)$ ，所得結果 (例如  $F(x, y) = \frac{1}{4} e^x y^4$ 、 $F(x, y) = \frac{1}{4} e^x y^4 - 1 + y$ 、 $F(x, y) = \frac{1}{4} e^x y^4 + \sqrt{\cos(x^2)} - \frac{1}{y}$ 、

...) 都滿足 (27)。

對於  $n$  元函數，並不限於只進行  $n$  重不定積分，而是可以進行更多重的不定積分運算。舉例說，如要求解以下微分方程：

$$D_y D_x D_y F(x, y) = e^x y^3 \quad (30)$$

我們可以 (29) 所示的計算結果為基礎進行以下計算：

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \iiint e^x y^3 \\ &= \int_y \left( \frac{1}{4} e^x y^4 + g_2(x) + h_1(y) \right) \\ &= \frac{1}{20} e^x y^5 + g_2(x)y + h_2(y) + g_3(x) \quad (31) \end{aligned}$$

其中  $g_2$ 、 $h_2$  和  $g_3$  代表任意函數。請讀者自行驗證，上式確是 (30) 的解。

以上討論的「 $n$  重不定積分／和分」概念還可以推廣到一元函數，這是因為對於一元函數，我們可以對其進行  $n$  重 ( $n$  為任意正整數) 微分／差分運算，而這種運算的逆運算就是「 $n$  重不定積分／和分」運算。類似前面討論的情況，這種運算也會出現於求解某些「一元微分／差分方程」的過程中。舉例說，設我們要求解以下一元差分方程：

$$\Delta^2 F(x) = x \quad (32)$$

現在如把  $\Delta^2$  的逆運算 (記作  $\sum^2$  或  $\sum\sum$ ) 作用於上式左右兩端，那麼上述方程的解  $F(x)$  可以逐步求得如下：

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum\sum x \\ &= \sum \left( \frac{x^2}{2h} + p(x) \right) \\ &= \frac{x^3}{6h^2} + \frac{xp(x)}{h} + q(x) \quad (33) \end{aligned}$$

其中  $p(x)$  和  $q(x)$  是帶有周期  $h$  的任意周期函數。請注意在進行差分和不定和分運算時，可以把  $p(x)$  當作常數處理，因而有  $\sum p(x) = \frac{xp(x)}{h}$ 。讀者請自行驗證，把任何兩個帶有周期  $h$  的具體函數代入 (33) 中的  $p(x)$  和  $q(x)$ ，所得結果 (例如  $F(x, y) = \frac{x^3}{6h^2}$ 、 $F(x, y) = \frac{x^3}{6h^2} - \frac{2x}{h}$ 、 $F(x, y) = \frac{x^3}{6h^2} + \frac{x}{h} \tan(\frac{\pi x}{h}) + \sin(\frac{2\pi x}{h})$ 、...) 都滿足 (32)。

---

連結至數學專題  
連結至周家發網頁