數學示例：冪級數解

在有關微分／積分方程的理論中，最理想的解是具有「封閉形式」(closed form) 的解，即以初等函數的有限四則運算或複合的形式出現的解。可是，絕大多數微分／積分方程的解都不能表示成這種形式，而只能表示成其他形式。對於「常微分方程」和「沃爾泰拉積分方程」而言，它們的解常可表示成一種特別形式－「冪級數」(power series) 形式，以下把以這種形式出現的解稱為冪級數解(power series solution)。

求冪級數解的主要步驟是，假設某常微分方程或沃爾泰拉積分方程的解 $f(x)$ 具有冪級數的形式，即假設

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (1)$$

在上式中，等號右端的式子是「以 a 為中心的冪級數」，其中 c_n 是這個級數中第 n 項的係數 (可以是常數，也可以是隨著 n 而變化的函數)，而 n 也稱為這個級數的「指標」(index)。由於以下只會考慮「以 0 為中心的冪級數」，在此情況下，(1) 可以簡化為

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (2)$$

把 (2) 代入有關方程後，還要進行代數和微積分運算，以得到 (2) 中係數的聯立方程組，求解這方程組，把結果重新代入 (2)，便得到原有方程的冪級數解[1]。在進行上述代數運算時，常常需要運用更改冪級數指標以及把兩個無窮級數相加或相乘的技巧；在進行微積分運算時，也常常需要運用對冪級數逐項求導數或定積分的技巧。

舉例說，考慮以下沃爾泰拉積分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (13))：

$$f(x) - \int_{t=0}^{t=x} (t-x) f(t) - 1 = 0 \qquad (3)$$

[1]以下不討論冪級數解的斂散性問題，只想指出以下討論的冪級數解都在某個範圍內收斂。

把 (2) 代入上述方程，並進行運算，可逐步求得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \int_{t=0}^{t=x} (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - 1 &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \int_{t=0}^{t=x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) - 1 &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{t=x} (c_n t^{n+1} - x c_n t^n) - 1 &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} - 1 &= 0 \\
c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_{m-2}}{m(m-1)} x^m - 1 &= 0 \\
(c_0 - 1) + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(c_n + \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \right) x^n &= 0
\end{aligned}$$

在上面第五行，我們把第一個冪級數的首兩項 $c_0 + c_1 x$ 抽出來，並把餘下的項寫成 $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$；同時又透過代入 $m = n + 2$ 更改了第二個冪級數的指標 (接著在第六行又把指標 m 重新改為 n)，這樣做的目的是使兩個冪級數有相同的下限 (即 2)，並且其中的 x 有相同的冪次 (即 n)，以便把這兩個冪級數相加。上面第六行展示相加的結果，並且把有相同冪次的項放在一起。從上面第六行，可以得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_0 - 1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_n + \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

從 (4) 可求得

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{c_0}{2(2-1)} = -\frac{1}{2!} \\ c_3 = -\frac{c_1}{3(3-1)} = 0 \\ c_4 = -\frac{c_2}{4(4-1)} = \frac{1}{4!} \\ c_5 = -\frac{c_3}{5(5-1)} = 0 \\ c_6 = -\frac{c_4}{6(6-1)} = -\frac{1}{6!} \\ \vdots \end{cases}$$

由此可以看到，(3) 的解的係數具有以下規律：

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \;\; c_{2n+1} = 0 \;\; (n \geq 0)$$

把此一結果代入 (2)，便可求得 (3) 的解如下：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x \qquad (5)$$

在上例中，我們可以辨認出所求得的冪級數解等於圓函數 $\cos x$。但在很多情況下，難以辨認出所求得的冪級數解等於某個初等函數或者某些初等函數經四則運算和有限複合而得的結果。在此情況下，只能寫出冪級數解開首的若干個項。舉例說，考慮以下常微分方程：

$$2D^2f(x)+xDf(x)+f(x)=0 \qquad (6)$$

把 (2) 代入上述方程，並進行運算，可逐步求得

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n &= 0\\
\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n &= 0\\
\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)(m+2)c_{m+2}x^m+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n &= 0\\
(4c_2+c_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(2(n+1)(n+2)c_{n+2}+nc_n+c_n)x^n &= 0
\end{aligned}$$

從上面最後一行，可以得到以下方程組：

$$\begin{cases}4c_2+c_0=0\\ 2(n+1)(n+2)c_{n+2}+nc_n+c_n=0\end{cases} \qquad (7)$$

從 (7) 可求得

$$\begin{cases}
c_2=-\frac{1}{4}c_0\\
c_3=-\frac{1}{2\times3}c_1\\
c_4=-\frac{1}{2\times4}c_2=\frac{1}{4^2 2!}c_0\\
c_5=-\frac{1}{2\times5}c_3=\frac{1}{2^2\times3\times5}c_1\\
c_6=-\frac{1}{2\times6}c_4=-\frac{1}{4^3 3!}c_0\\
c_7=-\frac{1}{2\times7}c_5=-\frac{1}{2^3\times3\times5\times7}c_1\\
c_8=-\frac{1}{2\times8}c_6=\frac{1}{4^4 4!}c_0\\
\vdots
\end{cases}$$

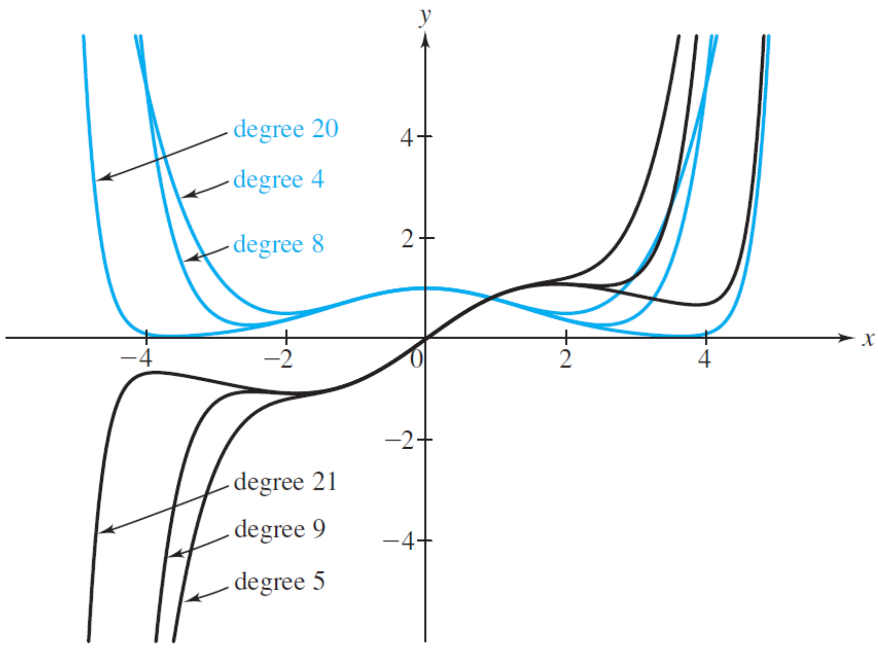
由此可以看到，(7) 的解的係數具有以下規律：

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{4^n n!}c_0,\ \ c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2^n\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}c_1 \ \ (n\geq 0)$$

把此一結果代入 (2)，便可求得 (6) 的解如下：

$$f(x)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!}x^{2n}+c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}x^{2n+1} \qquad (8)$$

在上式中，c_0 和 c_1 是任意常數。請注意由於 (6) 是 2 階常微分方程，它的通解應包含兩個任意常數，(8) 正符合我們的期望。下圖展示 (8) 的部分和 (partial sum) 的圖象：



在上圖中，藍色的一組曲線是在 (8) 取 $c_0=1, c_1=0$ 時的部分和，黑色的一組曲線則是在 (8) 取 $c_0=0, c_1=1$ 時的部分和。由於這些部分和只包含有限個項，它們實質上是多項式，上圖標示了這些多項式的「次數」(degree)，例如上圖中標示 degree 4 的曲線就是 4 次多項式 $1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{32}x^4$ 的圖象。

在求解非線性方程時，有時要運用對級數進行乘除和冪次運算的技巧。舉例說，考慮以下常微分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (41))：

$$Df(x)-x\sqrt{f(x)}=0,\ \ f(0)=0 \qquad (9)$$

由於設定了 $f(0)=0$，我們可以確定上述方程的冪級數解中的係數 c_0 等於 0，但不能確定 c_1、c_2 等等是否等於 0，因此我們假設 k 是使得 $c_k\neq 0$ 的最小正整數。在此一假設下，可以把 (2) 改寫成以下形式：

$$f(x)=x^k\left(c_k+c_{k+1}x+c_{k+2}x^2+\ldots\right),\ \ 其中 k>0, c_k\neq 0 \qquad (10)$$

另一方面，根據「廣義二項式定理」(generalized binomial theorem)，我們有

$$\sqrt{x+y} = (x+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^2 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^3 - \ldots \tag{11}$$

綜合利用 (10) 和 (11)，可求得 (請注意由於這裡涉及複雜的冪次運算，以下難以求得有關函數的冪級數的一般項，故只能展示這個冪級數的首數項)：

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{f(x)} \\
= \;& x \times x^{\frac{k}{2}}\left(c_k + (c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \ldots)\right)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& x^{\frac{k}{2}+1}\Bigg({c_k}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}{c_k}^{-\frac{1}{2}}(c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \ldots) - \frac{1}{8}{c_k}^{-\frac{3}{2}}(c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \ldots)^2 \\
& + \frac{1}{16}{c_k}^{-\frac{5}{2}}(c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \ldots)^3 - \ldots\Bigg) \\
= \;& {c_k}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{k}{2}+1} + \frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+1})x^{\frac{k}{2}+2} + \left(\frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+2}) - \frac{1}{8}({c_k}^{-\frac{3}{2}})({c_{k+1}}^2)\right)x^{\frac{k}{2}+3} \\
& + \left(\frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+3}) - \frac{1}{4}({c_k}^{-\frac{3}{2}})(c_{k+1}c_{k+2}) + \frac{1}{16}({c_k}^{-\frac{5}{2}})({c_{k+1}}^3)\right)x^{\frac{k}{2}+4}\ldots
\end{aligned} \tag{12}$$

把 (10) 和 (12) 代入 (9)，可得

$$\begin{aligned}
& kc_kx^{k-1} + (k+1)c_{k+1}x^k + (k+2)c_{k+2}x^{k+1} + (k+3)c_{k+3}x^{k+2} + \ldots \\
& -{c_k}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{k}{2}+1} - \frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+1})x^{\frac{k}{2}+2} - \left(\frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+2}) - \frac{1}{8}({c_k}^{-\frac{3}{2}})({c_{k+1}}^2)\right)x^{\frac{k}{2}+3} \\
& -\left(\frac{1}{2}({c_k}^{-\frac{1}{2}})(c_{k+3}) - \frac{1}{4}({c_k}^{-\frac{3}{2}})(c_{k+1}c_{k+2}) + \frac{1}{16}({c_k}^{-\frac{5}{2}})({c_{k+1}}^3)\right)x^{\frac{k}{2}+4} - \ldots = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

接下來要從 (13) 得到一個方程組並求解這個方程組，但並非任何正整數 k 都使得這個方程組有解。設 $k=1$ (亦即假設 $c_1 \neq 0$)，把 $k=1$ 代入 (13)，可從 (13) 得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

可是上面第一個方程與 $c_1 \neq 0$ 相矛盾，因此從 $k=1$ 這個假設不能得到 (9) 的解。基於相似的理據，若假設 k 是其他正奇數，同樣不能得到 (9) 的解。

接著設 $k=2$ (亦即假設 $c_1 = 0, c_2 \neq 0$)，把 $k=2$ 代入 (13)，可從 (13) 得到以下方程組：

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

可是從上面第一個方程可得 $c_2 = 0$，這與 $c_2 \neq 0$ 相矛盾，因此從 $k = 2$ 這個假設不能得到 (9) 的解。

接著設 $k = 4$ (亦即假設 $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 \neq 0$)，把 $k = 4$ 代入 (13)，可從 (13) 得到以下方程組：

$$\begin{cases} 4c_4 - {c_4}^{\frac{1}{2}} = 0 \\ 5c_5 - \frac{1}{2}({c_4}^{-\frac{1}{2}})(c_5) = 0 \\ 6c_6 - \frac{1}{2}({c_4}^{-\frac{1}{2}})(c_6) + \frac{1}{8}({c_4}^{-\frac{3}{2}})({c_5}^2) = 0 \\ 7c_7 - \frac{1}{2}({c_4}^{-\frac{1}{2}})(c_7) + \frac{1}{4}({c_4}^{-\frac{3}{2}})(c_5c_6) - \frac{1}{16}({c_4}^{-\frac{5}{2}})({c_5}^3) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

把 $d = {c_4}^{\frac{1}{2}}$ 代入上面第一個方程，可得到 2 次方程 $4d^2 - d = 0$，這個方程有兩個根：$\frac{1}{4}$ 和 0，從第一個根 $d = \frac{1}{4}$ 可求得 $c_4 = \frac{1}{16}$；而第二個根 $d = 0$ 則是上述 2 次方程的「增根」(extraneous root)，應予捨棄 (因為從 $d = 0$ 可得到 $c_4 = 0$，這跟 $c_4 \neq 0$ 相矛盾)，把 $c_4 = \frac{1}{16}$ 代入上面第二個方程，可得 $3c_5 = 0$，由此可求得 $c_5 = 0$。把 $c_4 = \frac{1}{16}, c_5 = 0$ 代入上面第三個方程，可得 $4c_6 = 0$，由此可求得 $c_6 = 0$。把 $c_4 = \frac{1}{16}, c_5 = c_6 = 0$ 代入上面第四個方程，可得 $5c_7 = 0$，由此可求得 $c_7 = 0$。至此可以看到，對於 $n > 4$，都有 $c_n = 0$，因此從 $k = 4$ 這個假設可以得到 (9) 的一個解 $f(x) = \frac{1}{16}x^4$。

接著設 $k = 6$ (亦即假設 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0, c_6 \neq 0$)，把 $k = 6$ 代入 (13)，可從 (13) 得到以下方程組：

$$\begin{cases} -{c_6}^{\frac{1}{2}} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

可是從上面第一個方程可得 $c_6 = 0$，這與 $c_6 \neq 0$ 相矛盾，因此從 $k = 6$ 這個假設不能得到 (9) 的解。基於相似的理據，若假設 k 是大於 4 的其他偶數，同樣得不到 (9) 的解。

最後設 $k = \infty$ (亦即假設 $c_1 = c_2 = \ldots = 0$)，這相當於假設 $f(x) = 0$ 是 (9) 的一個解，容易驗證這個假設是正確的。總結以上的討論，我們求得 (9) 的以下兩個解：

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 \text{ 或 } f(x) = 0 \qquad (14)$$

以上結果跟《數學示例：方程與解》中的結果 (請參閱該網頁的 (43)) 一致。

若有關方程涉及多項式以外的初等函數，那麼可以把這些函數的「泰勒級數」代入這些方程，並進行運算。舉例說，考慮以下沃爾泰拉積分方程：

$$f(x)+2\int_{t=0}^{t=x}\cos(x-t)f(t)-e^{-x}=0 \qquad (15)$$

由於上式包含圓函數和指數函數，我們要使用以下泰勒級數：

$$\cos(x-t)=1-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{24}(x-t)^4-\frac{1}{720}(x-t)^6+\ldots \qquad (16)$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6-\ldots \qquad (17)$$

利用 (16)，可求得 (請注意由於這裡涉及複雜的乘法和定積分運算，以下難以求得有關函數的冪級數的一般項，故只能展示這個冪級數的首數項)：

$$\begin{aligned}
& 2\int_{t=0}^{t=x}\cos(x-t)f(t) \\
= \; & 2\int_{t=0}^{t=x}\left(1-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{24}(x-t)^4-\ldots\right)(c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+c_5t^5+\ldots) \\
= \; & 2\int_{t=0}^{t=x}\Big(c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+c_5t^5+\ldots-\frac{1}{2}c_0(x-t)^2-\frac{1}{2}c_1t(x-t)^2 \\
& -\frac{1}{2}c_2t^2(x-t)^2-\frac{1}{2}c_3t^3(x-t)^2-\ldots+\frac{1}{24}c_0(x-t)^4+\frac{1}{24}c_1t(x-t)^4+\ldots\Big) \\
= \; & 2c_0x+c_1x^2+\frac{2}{3}c_2x^3+\frac{1}{2}c_3x^4+\frac{2}{5}c_4x^5+\frac{1}{3}c_5x^6+\ldots \\
& -\frac{1}{3}c_0x^3-\frac{1}{12}c_1x^4-\frac{1}{30}c_2x^5-\frac{1}{60}c_3x^6-\ldots+\frac{1}{60}c_0x^5+\frac{1}{360}c_1x^6+\ldots \qquad (18)
\end{aligned}$$

把 (2)、(17) 和 (18) 代入 (15)，可得

$$\begin{aligned}
& c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+\ldots \\
& +2c_0x+c_1x^2+\frac{2}{3}c_2x^3+\frac{1}{2}c_3x^4+\frac{2}{5}c_4x^5+\frac{1}{3}c_5x^6+\ldots \\
& -\frac{1}{3}c_0x^3-\frac{1}{12}c_1x^4-\frac{1}{30}c_2x^5-\frac{1}{60}c_3x^6-\ldots+\frac{1}{60}c_0x^5+\frac{1}{360}c_1x^6+\ldots \\
& -1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{720}x^6+\ldots=0 \qquad (19)
\end{aligned}$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_0 - 1 = 0 \\ c_1 + 2c_0 + 1 = 0 \\ c_2 + c_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ c_3 + \frac{2}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{6} = 0 \\ c_4 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{12}c_1 - \frac{1}{24} = 0 \\ c_5 + \frac{2}{5}c_4 - \frac{1}{30}c_2 + \frac{1}{60}c_0 + \frac{1}{120} = 0 \\ c_6 + \frac{1}{3}c_5 - \frac{1}{60}c_3 + \frac{1}{360}c_1 - \frac{1}{720} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

解上述方程組,可得 $c_0 = 1, c_1 = -3, c_2 = \frac{7}{2}, c_3 = -\frac{13}{6}, c_4 = \frac{7}{8}, c_5 = -\frac{31}{120}, c_6 = \frac{43}{720}, \ldots$。把上述結果代入 (2)，便可求得 (15) 的解如下：

$$f(x) = 1 - 3x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{31}{120}x^5 + \frac{43}{720}x^6 - \ldots \qquad (20)$$

請注意上式其實包含著以下函數的泰勒級數的首七項 (而讀者可以自行驗證，下式確是 (15) 的解)：

$$f(x) = e^{-x}(x-1)^2 \qquad (21)$$

可是從 (20) 卻難以辨認出它等於 (21)，這個例子顯示冪級數解有其局限之處，但在其他解題方法不適用或者較難計算的情況下，本文介紹的方法不失為一種求取方程近似值的方法。

連結至數學專題
連結至周家發網頁