數學示例：主曲率

我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中介紹了曲面上曲線的曲率。由於通過某曲面 S 上一點 q 的曲線可以有無窮多條，每條曲線在 q 點處的曲率可以各有不同，現在的問題是，能否在這無窮多個曲線曲率中，找出少數幾個具代表性的曲線曲率，以有效反映 S 於 q 點處的彎曲情況？這是本文要探討的內容，讀者將會發現，本文介紹的「主曲率」就是前述具代表性的曲率。

由於主曲率的定義是建基於「法曲率」之上，以下首先重溫相關概念。設下式為曲面 S 的坐標卡：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \ X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \qquad (1)$$

並設某平面曲線具有以下光滑正則參數化形式：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ \ Y(t) = (u_1(t), u_2(t)) \qquad (2)$$

如有 $Y(D) \subseteq E$，那麼可把 (1) 與 (2) 複合，得到一條曲面上曲線的參數化形式：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ \ Z(t) = (x(u_1(t), u_2(t)), y(u_1(t), u_2(t)), z(u_1(t), u_2(t))) \qquad (3)$$

設 q 為 S 上一點，並且 $q = Z(t)$，以下是 q 點處法曲率的計算公式 (下式等於《數學示例：曲面上曲線的性質》中的 (17))：

$$\kappa_n(t) = \frac{[Y\text{'}(t)]^T \times [L_{ij} \circ Y(t)] \times [Y\text{'}(t)]}{[Y\text{'}(t)]^T \times [g_{ij} \circ Y(t)] \times [Y\text{'}(t)]} \qquad (4)$$

上式中四個矩陣 $[Y\text{'}(t)]^T$、$[Y\text{'}(t)]$、$[L_{ij} \circ Y(t)]$ 和 $[g_{ij} \circ Y(t)]$ 的詳細定義請參閱上述網頁，以下僅提供計算 $N(u_1, u_2)$、$L_{ij}(u_1, u_2)$ 和 $g_{ij}(u_1, u_2)$ 的公式 (以下公式等於上述網頁的 (5)、(18) 和 (19))：

$$\begin{aligned}
N(u_1, u_2) &= \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|} && (5) \\
L_{ij}(u_1, u_2) &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_i\, \partial u_j}(u_1, u_2) \cdot N(u_1, u_2) && (6) \\
g_{ij}(u_1, u_2) &= \frac{\partial X}{\partial u_i}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}(u_1, u_2) && (7)
\end{aligned}$$

從 (4) 可以看到, 若把 $X(u_1, u_2)$ 固定, 則 $\kappa_n(t)$ 的值只會隨 $Y(t)$ 和 $Y'(t)$ 的值而變化, 以下讓我們細心分析這兩個值。首先, 由於 $q = Z(t) = X(Y(t))$, 可知 $Y(t)$ 提供 q 點的位置信息。其次, 運用複合函數求導的鏈式法則[1]：

$$Z'(t) = u_1'(t)\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1(t), u_2(t)) + u_2'(t)\frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1(t), u_2(t))$$

另一方面, 根據我們在《數學示例：切空間與可定向性》中的討論, S 上 q 點處的任何切向量都可表示成「切空間」T_qS 上兩個基底向量 $\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ 和 $\frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)$ 的線性組合。由此從上式可知, $Y'(t)$ $(= (u_1'(t), u_2'(t)))$ 提供 T_qS 上某個切向量的方向的信息。

請注意當我們說某二維向量 (v_1, v_2) (例如上段的 $Y'(t)$) 代表 T_qS 上的某個「方向」時, 這個向量是定義域 E 上的二維向量而非曲面上的三維切向量。如要把 E 上的方向 (v_1, v_2) 轉化成 S 上的切向量 $V(u_1, u_2)$ [2], 可以使用以下公式：

$$V(u_1, u_2) = v_1\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) + v_2\frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \qquad (8)$$

正如複合運算 $X \circ Y(t)$ 是用來把平面曲線 $Y(t)$ 轉化成 S 上的曲線, 上式是用來把 E 上的向量轉化成 S 上的切向量。

基於上段所述, 可知在固定 S 上某點 q 的情況下, 如果兩條曲線在 q 點處的切向量對應著 E 上的平行方向, 那麼它們必有相同的法曲率, 這是因為如果 E 上的兩個向量平行, 並且如果其中一個可寫成 $Y'(t)$ 的形式, 則另一個必具有 $kY'(t)$ 的形式 (其中 k 是非零實數)。如把 $kY'(t)$ 取代 (4) 中的 $Y'(t)$, 則 (4) 的分子和分母中的 k 必然互相抵消, 所得結果必等於 (4) 的原來結果。

舉例說, 考慮我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中討論過的圓柱面, 以下記作 S_1, 其坐標卡為 (下式等於上述網頁 (8) 中的 X_1)：

$$X_1 : (-\pi, \pi) \times (0, h) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_1(u_1, u_2) = (r\cos u_1, r\sin u_1, u_2) \qquad (9)$$

根據上述網頁的計算結果, 我們有

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) &= (-r\sin u_1, r\cos u_1, 0) \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

[1]根據該法則, 若有 $z = z(x, y)$, 並且 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$, 則 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$。

[2]即使 (v_1, v_2) 是固定的方向, 這個方向在 S 的不同點處可體現為不同的向量, 所以 $V(u_1, u_2)$ 表現為一個函數。

以及

$$[(g_{ij})_1(u_1,u_2)] = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [(L_{ij})_1(u_1,u_2)] = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

現取以下兩條平面曲線：

$$Y_1 : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2;\ \ Y_1(t) = \left(t, \frac{h}{2}\right) \qquad (10)$$

$$Y_2 : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2;\ \ Y_2(t) = \left(-2t, \frac{h}{2}\right) \qquad (11)$$

由此有

$$Z_1 : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_1(t) = \left(r\cos t, r\sin t, \frac{h}{2}\right) \qquad (12)$$

$$Z_2 : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_2(t) = \left(r\cos 2t, -r\sin 2t, \frac{h}{2}\right) \qquad (13)$$

容易看到，$Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的圖象都是 S_1 上 z 坐標恆為 $\frac{h}{2}$ 的圓，但由於 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 有不同的參數化形式，故應視為不同的曲線。此外，從 (10) 和 (11)，我們有

$$Y_1\text{'}(t) = (1,0) \qquad\qquad Y_2\text{'}(t) = (-2,0)$$

由此可見在確定某 t 值的情況下，$Y_1\text{'}(t)$ 和 $Y_2\text{'}(t)$ 代表 X_1 的定義域上的相同方向，請注意這裡我們有 $Y_2\text{'}(t) = -2Y_1\text{'}(t)$。由此根據上面的討論，$Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 應有相同的法向量。為驗證這一點，首先把 $Y_1\text{'}(t)$ 代入 (4)，從而求得

$$\begin{aligned}(\kappa_n)_1(t) &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ &= -\frac{1}{r}\end{aligned}$$

接著再把 $-2Y_1\text{'}(t)$ 代入 (4)，從而求得

$$\begin{aligned}(\kappa_n)_2(t) &= \frac{4\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{4\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ &= -\frac{1}{r}\end{aligned}$$

可見確有 $(\kappa_n)_1(t) = (\kappa_n)_2(t)$。

上述計算結果顯示，在考慮某曲面 S 於 q 點處的法曲率時，其實無需考慮任何曲線，而只需考慮定義域 E 上的方向。請注意這裡把互相平行的二維向量視為代表相同的「方向」，而不管這些向量的箭頭是否同向，例如把 $(1, 0)$ 和 $(-2, 0)$ 視為代表相同的方向。因此以下在提及法曲率時，我們一般不再提「S 上某曲線於 q 點處的法曲率」，而只提「E 上某方向的法曲率」，而法曲率的符號也從 $\kappa_n(t)$ 改為 $\kappa_n(u_1, u_2)$。

不過，E 上有無窮多個不同方向，這是否意味著我們要考慮這無窮多個方向的法曲率？幸好，為研究曲面的彎曲情況，只需考慮兩個極端方向，即對應著 q 點處最大和最小法曲率的方向。微分幾何把 q 點處的最大和最小法曲率合稱為主曲率(principal curvature)，分別記作 $\kappa_M(u_1, u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1, u_2)$，並把對應這兩個主曲率的方向合稱為主方向(principal direction)。

為求主曲率和主方向，我們要求一個矩陣的「特徵值」(eigenvalue) 和「特徵向量」(eigenvector)，這個矩陣稱為韋因加爾滕矩陣(Weingarten matrix)，其定義如下：設 $X(u_1, u_2)$ 為坐標卡，則 X 的韋因加爾滕矩陣是指以下矩陣：

$$W(u_1, u_2) = [g_{ij}(u_1, u_2)]^{-1} \times [L_{ij}(u_1, u_2)] \qquad (14)$$

在求上述矩陣時，要計算 2×2 矩陣的逆。根據線性代數的知識，若 $[M_{ij}]$ 是 2×2 矩陣，其中 M_{ij} 是該矩陣第 i 行第 j 列上的項，則

$$[M_{ij}]^{-1} = \frac{1}{\det([M_{ij}])} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

在上式中，$\det([M_{ij}])$ 代表 $[M_{ij}]$ 的行列式，以下是其計算公式：

$$\det([M_{ij}]) = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \qquad (16)$$

至於「特徵值」和「特徵向量」的概念，我們在《數學示例：特徵值與譜》中作了詳細介紹。簡言之，給定一個 2×2 矩陣 $[W_{ij}]$，$[W_{ij}]$ 的特徵值和特徵向量是指滿足以下等式的數 κ 和非零向量 (v_1, v_2) (以下把這個向量寫成 2×1 矩陣的形式)：

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

為求滿足上式的 κ 和 (v_1, v_2)，可以先用下式解出 κ (在下式中，I_2 代表 2 階單位矩陣)：

$$\det(W - \kappa I_n) = 0$$

用矩陣形式寫出來，上式就是

$$\det\left(\begin{bmatrix} W_{11}-\kappa & W_{12} \\ W_{21} & W_{22}-\kappa \end{bmatrix}\right)=0 \qquad (18)$$

接著把求得的 κ 代入 (17)，便可解出 (v_1, v_2)。請注意 (18) 可以看成以 κ 作為未知項的實係數二次方程，理論上，這樣的方程可以有兩個相異實數根、一個實數重根和兩個共軛複數根，以下定理概括了 (18) 的根的所有可能情況。

定理 1：設 q 為某曲面 S 上的點，(1) 為涵蓋 q 點 (其中 $q = X(u_1, u_2)$) 的坐標卡，並設 $W(u_1, u_2)$ 為 X 的韋因加爾滕矩陣

(i) $W(u_1, u_2)$ 有兩個 (不一定相異的) 實數特徵值 κ_M 和 κ_m，它們是 T_qS 上的主曲率；

(ii) 若 $\kappa_M \neq \kappa_m$，則 $W(u_1, u_2)$ 對應於這兩個相異特徵值的特徵向量代表 E 上的主方向，而且這兩個方向所對應 T_qS 上的切向量互相垂直；

(iii) 若 $\kappa_M = \kappa_m$，則 E 上的任何方向都是主方向，這樣的 q 點稱為臍點(umbilical point)。

現以前面討論過的圓柱面 S_1 為例說明上述概念，基於前面的中間計算結果。根據 (15) 和 (16)，可求得

$$\begin{aligned}[(g_{ij})_1(u_1,u_2)]^{-1} &= \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此根據 (14)，可求得

$$\begin{aligned}W_1(u_1,u_2) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

接著要求 $W_1(u_1, u_2)$ 的特徵值，根據 (18)，我們要解

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{r}-\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}\right)=0$$

根據 (16)，上式等於

$$\left(-\frac{1}{r}-\kappa\right)(-\kappa)=0$$

上式的兩個解就是 T_qS_1 上的主曲率，由此我們有

$$(\kappa_M)_1(u_1,u_2)=0 \qquad (\kappa_m)_1(u_1,u_2)=-\frac{1}{r}$$

為求對應這兩個特徵值的特徵向量，可把上述計算結果代入 (17)，得到

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}=0\times\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}=-\frac{1}{r}\times\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

把以上矩陣乘積展開，可得到以下兩組聯立方程：

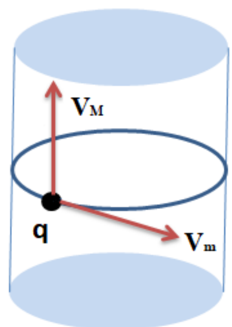
$$\begin{cases} -\frac{1}{r}v_{11}=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{r}v_{21}=-\frac{1}{r}v_{21} \\ 0=-\frac{1}{r}v_{22} \end{cases}$$

解第一組聯立方程，可得 $v_{11}=0$，因此對應於 0 的特徵向量是任何具有 $(0,v_{12})$ 形式的向量，這個向量代表對應於 0 的主方向，為清晰起見，這裡設定 $v_{12}=1$。解第二組聯立方程，可得 $v_{22}=0$，因此對應於 $-\frac{1}{r}$ 的特徵向量是任何具有 $(v_{21},0)$ 形式的向量，這個向量代表對應於 $-\frac{1}{r}$ 的主方向，為清晰起見，這裡設定 $v_{21}=1$。

最後，我們運用 (8) 把以上求得的主方向 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 轉化成 T_qS_1 上的切向量，分別記作 $(V_M)_1(u_1,u_2)$ 和 $(V_m)_1(u_1,u_2)$：

$$\begin{aligned}
(V_M)_1(u_1,u_2) &= 0\times\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1,u_2)+1\times\frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\
&= (0,0,1) \\
(V_m)_1(u_1,u_2) &= 1\times\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1,u_2)+0\times\frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\
&= (-r\sin u_1, r\cos u_1, 0)
\end{aligned}$$

下圖展示上述計算結果，這裡假設 $q=X_1(0,\frac{h}{2})=(r,0,\frac{h}{2})$：



上圖繪出了 T_qS_1 上對應兩個主方向的切向量 $(V_M)_1(0,\frac{h}{2}) = (0,0,1)$ 和 $(V_m)_1(0,\frac{h}{2}) = (0,r,0)$。容易看到，上述兩個向量互相垂直 (它們的點積等於 0)，由此驗證了「定理 1(ii)」。由於 $(\kappa_m)_1(0,\frac{h}{2}) = -\frac{1}{r}$ 正好等於前面求得的法曲率 $(\kappa_n)_1(0)$ 和 $(\kappa_n)_2(0)$，這顯示 $(\kappa_m)_1(0,\frac{h}{2})$ 其實就是前面討論過的 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 於上圖 q 點處 (對應著 $t=0$) 的法曲率。請注意主方向 $(1,0)$ 正好與 Y_1'(0) 和 Y_2'(0) 平行，而上圖中的藍色圓形也正是 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的圖象，即 S_1 上 z 坐標恆為 $\frac{h}{2}$ 的圓。至於 $(\kappa_M)_1(0,\frac{h}{2})$，讀者可自行驗證，如取以下平面曲線：

$$Y_3 : (0,h) \to \mathbb{R}^2;\;\; Y_3(t) = (0,t) \qquad (19)$$

那麼 $Z_3(t) = X_1(Y_3(t))$ 代表 S_1 上穿過上圖 q 點並與 z 軸平行的直線，而主方向 $(0,1)$ 正好與 Y_3'(0) 平行，因此 $(\kappa_M)_1(0,\frac{h}{2}) = 0$ 等於這條直線於上圖 q 點處的法曲率。

如前所述，主曲率是 q 點處的最大和最小法曲率，因此 q 點處的其他法曲率都應介乎兩個主曲率之間。為驗證這一點，現取以下平面曲線 (在下式中，D_4 是可使 $Y_4(D_4) \subseteq (-\pi,\pi)\times(0,h)$ 的定義域)：

$$Y_4 : D_4 \to \mathbb{R}^2;\;\; Y_4(t) = \left(t, pt + \frac{h}{2}\right) \qquad (20)$$

把 (9) 與 (20) 複合，可得以下曲線：

$$Z_4 : D_4 \to \mathbb{R}^3;\;\; Z_4(t) = \left(r\cos t, r\sin t, pt + \frac{h}{2}\right) \qquad (21)$$

上式跟《數學示例：曲面上曲線的性質》(10) 中的 Z_1 相似，也代表圓柱面上的圓螺旋線，而且這是一條穿過上述 q 點 (對應著 $t=0$) 的圓螺旋線。由於 Y_4'$(t) = (1,p)$，讀者可自行驗證，根據 (4)，可求得 q 點處的法曲率等於 $-\frac{r}{r^2+p^2}$，此一結果與上述網頁求得的圓螺旋線的法曲率吻合。此外，容易看到此一數值的確介乎 0 與 $-\frac{1}{r}$ 之間。

接下來看一個包含臍點的例子，考慮我們在《數學示例：基本形式係數》中討論過的 r 半徑球面，其坐標卡為 (下式等於上述網頁 (5) 中的 X_1)：

$$\begin{aligned} X_5 : \quad & (-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3; \\ X_5(u_1,u_2) = \quad & (r\cos u_1\cos u_2, r\sin u_1\cos u_2, r\sin u_2) \qquad (22) \end{aligned}$$

讀者可自行驗證以下計算結果：

$$[(g_{ij})_5(u_1,u_2)] = \begin{bmatrix} r^2\cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \qquad [(L_{ij})_5(u_1,u_2)] = \begin{bmatrix} -r\cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}$$

由此有

$$[(g_{ij})_5(u_1,u_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2\cos^2 u_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$W_5(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

為求 $W_5(u_1,u_2)$ 的特徵值，我們要解

$$\left(-\frac{1}{r}-\kappa\right)^2 = 0$$

上式只有一個實數重根，即

$$(\kappa_M)_5(u_1,u_2) = (\kappa_m)_5(u_1,u_2) = -\frac{1}{r}$$

上述結果適用於 r 半徑球面上任何一點，由此根據「定理 1(iii)」，可知 r 半徑球面上的每一點都是臍點，而且 X_5 的定義域上的任何方向都是主方向。上述結果符合我們對球面的直觀：球面上每一點處在每一個方向上的彎曲程度都是相同的，即每一個方向上的法曲率都相同，因此其最大和最小法曲率也相同。

主曲率不僅記錄了某曲面上某點處的最大和最小法曲率，而且還可提供該點處所有其他方向的法曲率，這是以下定理的內容。

定理 2 (歐拉曲率公式Euler Curvature Formula)：設 q 為某曲面 S 上的點，(1) 為涵蓋 q 點 (其中 $q = X(u_1,u_2)$) 的坐標卡，$\kappa_M(u_1,u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 為 S 於 q 點處的主曲率，$V_M(u_1,u_2)$ 和 $V_m(u_1,u_2)$ 為 T_qS 上對應主方向的切向量。現設 (a_1,a_2) 代表 E 上的某個方向，$A(u_1,u_2)$ 為 T_qS 上對應這個方向的切向量，並且 $V_M(u_1,u_2)$ 與 $A(u_1,u_2)$ 之間的夾角為 θ，則 (a_1,a_2) 方向的法曲率 $\kappa_n(u_1,u_2)$ 可用以下公式求得：

$$\kappa_n(u_1,u_2) = \cos^2\theta \times \kappa_M(u_1,u_2) + \sin^2\theta \times \kappa_m(u_1,u_2) \qquad (23)$$

上式的 $\cos\theta$ 可根據點積的定義 (請參閱《數學示例：基本形式係數》中的 (3)) 求得，即若 v 和 w 為向量，則它們的夾角 θ 滿足以下公式：

$$\cos\theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|} \qquad (24)$$

我們考慮兩個極端情況，首先，如果 $A(u_1,u_2) = V_M(u_1,u_2)$，那麼由於 $V_M(u_1,u_2)$ 與 $V_M(u_1,u_2)$ 之間的夾角是 0。根據上述公式，$V_M(u_1,u_2)$ 方向上的法曲率等於

$$\cos^2 0 \times \kappa_M(u_1,u_2) + \sin^2 0 \times \kappa_m(u_1,u_2) = \kappa_M(u_1,u_2)$$

這是正確的,因為對應著 $\kappa_M(u_1,u_2)$ 的主方向的法曲率當然就等於 $\kappa_M(u_1,u_2)$。其次，如果 $A(u_1,u_2)=V_m(u_1,u_2)$，那麼由於 $V_m(u_1,u_2)$ 與 $V_M(u_1,u_2)$ 互相垂直，它們之間的夾角是 $\frac{\pi}{2}$。根據上述公式，$V_m(u_1,u_2)$ 方向上的法曲率等於

$$\cos^2\frac{\pi}{2}\times\kappa_M(u_1,u_2)+\sin^2\frac{\pi}{2}\times\kappa_m(u_1,u_2)\ =\kappa_m(u_1,u_2)$$

這也是正確的，因為對應著 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 的主方向的法曲率當然就等於 $\kappa_m(u_1,u_2)$。

接下來讓我們用 (23) 求前面 Z_4 所代表圓螺旋線於 q 點處的法曲率。沿用前面關於 X_1 的計算結果，$(\kappa_M)_1(u_1,u_2)\ =\ 0$、$(\kappa_m)_1(u_1,u_2)\ =\ -\frac{1}{r}$、$(V_M)_1(u_1,u_2)=(0,0,1)$。根據前面的討論，$Y_4$'$(t)=(1,p)$ 就是這條圓螺旋線於 q 點處的方向。根據 (8)，T_qS_1 上對應這個方向的切向量是

$$\begin{aligned}A(u_1,u_2) &= 1\times\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1,u_2)+p\times\frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1,u_2)\\ &= (-r\sin u_1,r\cos u_1,p)\end{aligned}$$

接著利用 (24) 求 $\cos^2\theta$，其中 θ 為 $(V_M)_1(u_1,u_2)$ 與 $A(u_1,u_2)$ 之間的夾角：

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left(\frac{(0,0,1)\cdot(-r\sin u_1,r\cos u_1,p)}{\|(0,0,1)\|\|(-r\sin u_1,r\cos u_1,p)\|}\right)^2\\ &= \frac{p^2}{r^2+p^2}\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta\\ &= \frac{r^2}{r^2+p^2}\end{aligned}$$

把上述結果代入 (23)，便可求得

$$\begin{aligned}\kappa_n(u_1,u_2) &= \frac{p^2}{r^2+p^2}\times 0+\frac{r^2}{r^2+p^2}\times\left(-\frac{1}{r}\right)\\ &= -\frac{r}{r^2+p^2}\end{aligned}$$

這與前面提及的結果吻合。

請注意 (23) 也適用於臍點,這是因為若 $q=X(u_1,u_2)$ 是臍點,則 $\kappa_M(u_1,u_2)=$

$\kappa_m(u_1,u_2)$。這即是說，q 點處的最大和最小法曲率相同，因此 q 點處任何方向的法曲率都必等於 $\kappa_M(u_1,u_2)$，此一結果可從 (23) 推得：

$$
\begin{aligned}
\kappa_n(u_1,u_2) &= \cos^2\theta\times\kappa_M(u_1,u_2)+\sin^2\theta\times\kappa_M(u_1,u_2)\\
&= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)\times\kappa_M(u_1,u_2)\\
&= \kappa_M(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

主曲率還有另一個用途，就是用來區分曲面上的四類點。我們在《數學示例：基本形式係數》中介紹了一種建基於 $\det([L_{ij}(u_1,u_2)])$ 的正負值以及 $[L_{ij}(u_1,u_2)]$ 是否等於 O (即「零矩陣」) 的區分方法。現介紹一種建基於主曲率的區分方法。設 X 為某曲面的坐標卡，q 是該曲面的點，並且 $q=X(u_1,u_2)$，$\kappa_M(u_1,u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 是 q 點處的主曲率，我們有以下結果：

(i) 若 $\kappa_M(u_1,u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 同為正數或同為負數，則 q 是橢圓型點

(ii) 若 $\kappa_M(u_1,u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 一正一負，則 q 是雙曲型點

(iii) 若 $\kappa_M(u_1,u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1,u_2)$ 中剛好有一個是 0，則 q 是拋物型點

(iv) 若 $\kappa_M(u_1,u_2)=\kappa_m(u_1,u_2)=0$，則 q 是平面型點

根據前面的計算結果，由於 $(\kappa_M)_1(u_1,u_2)$ 和 $(\kappa_m)_1(u_1,u_2)$ 中剛好有一個是 0, 根據 (iii) 可知圓柱面上的任何點都是拋物型點。另外, 由於 $(\kappa_M)_5(u_1,u_2)$ 和 $(\kappa_m)_5(u_1,u_2)$ 同為負數，根據 (i) 可知球面上的任何點都是橢圓型點。有關雙曲型點和平面型點的例子，請參閱《數學示例：基本形式係數》。

連結至數學專題
連結至周家發網頁