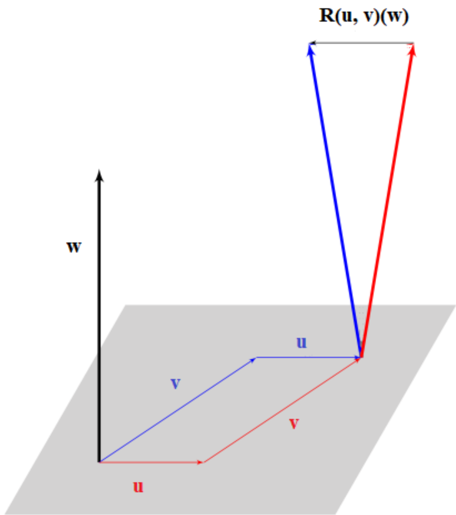
數學示例：黎曼曲率

我們在《數學示例：空間曲線的性質》、《數學示例：曲面上曲線的性質》、《數學示例：主曲率》和《數學示例：高斯曲率與平均曲率》中介紹了 1 維曲線和 2 維曲面上的多種「曲率」概念。本文主旨是介紹一般 n 維黎曼流形上的曲率－「黎曼曲率」，讀者將會看到，黎曼曲率與之前介紹的「高斯曲率」和協變導數分量的交換性存在微妙關係。

設 (M, g) 為 m 維黎曼流形，∇ 為從 g 導出的列維-奇維塔聯絡，考慮下圖所示的情況：



在上圖中，向量 w 沿兩個不同路徑進行平行移動 (請參閱《數學示例：內蘊導數》中有關「平行移動」的介紹)。第一個路徑是先沿向量 v 的方向後沿向量 u 的方向移動的藍色路徑，經此移動後 w 變成上圖中的藍色向量。另一個路徑則是先沿向量 u 的方向後沿向量 v 的方向移動的紅色路徑，經此移動後 w 變成上圖中的紅色向量。從直觀上看，如果上圖中的路徑位於平面上，那麼藍色向量和紅色向量應為同一個向量；但如果上述路徑位於曲面上，該兩個向量便可能有所不同，因此這兩個向量之差反映曲面的彎曲程度。

在黎曼幾何中，我們把上圖所示的情況抽象為一個函數，稱為第二類黎曼曲率(Riemannian curvature of the second kind)，以下記作 R，這是 M 上的一個 $(1,3)$ 張量場，使得給定 M 上的三個向量場 u、v 和 w，我們有 (在下式中，$[u,v]$ 代表 u 和 v 的「李括號」，其定義見《數學示例：向量場的李導數》中的 (21))：

$$R(u,v)(w) = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]} w \qquad (1)$$

上式把 R 表示成「二重函數」，把這個 (第一層) 函數作用於一對向量場 (u,v)，其結果 $R(u,v)$ 又是一個函數，把這個 (第二層) 函數作用於向量場 w，其結果 $R(u,v)(w)$ 是一個向量場[1]，這個向量場在上圖中用藍色向量和紅色向量之差來代表，如前所述，這個向量差正可反映曲面的彎曲程度。由於向量場本身又是一個把微分 1 形式映射為 M 上實值函數的函數 (即若 α 是微分 1 形式，則 $R(u,v)(w)(\alpha)$ 是一個 M 上實值函數)，因此 R 可被看成以 1 個微分 1 形式和 3 個向量場作為論元並輸出 M 上實值函數的函數，所以是一個 $(1,3)$ 張量場。

作為 $(1,3)$ 張量場，R 也可以寫成以下形式 (下式採用嚴式求和約定)：

$$R = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \qquad (2)$$

其中 R^l_{ijk} 是 R 的分量，可用以下公式計算：

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp} \qquad (3)$$

以上提供了 R 的兩個等價定義，其中 (1) 把 R 表示成「二重函數」的形式 (不涉及坐標系)，(2) 和 (3) 則寫出 R 的分量相對於坐標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ 的形式。不難證明，以上兩種表示法具有以下關係：

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} \qquad (4)$$

以下我們將主要使用第二種表示形式。此外，我們說黎曼流形 (M,g) 是平坦(flat) 的，若其黎曼曲率是零張量場。

舉例說，考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中介紹的 $\mathbb{R}^2$ 上的以下歐幾里得度量 (下式等於上述網頁的 (3))：

$$g_I = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \qquad (5)$$

[1]根據《數學示例：列維-奇維塔聯絡》，若 v 和 w 是向量場，則 $\nabla_v w$ 也是向量場，因此 $\nabla_u(\nabla_v w)$ 和 $\nabla_v(\nabla_u w)$ 都是向量場。另一方面，根據《數學示例：向量場的李導數》，若 u 和 v 是向量場，則 $[u,v]$ 是向量場，因此 $\nabla_{[u,v]} w$ 也是向量場。

根據上述網頁，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，對任何 $i, j, k \in \{1, 2\}$，都有 $(\Gamma_I)^i_{jk} = 0$。由此根據 (3)，可知對任何 $i, j, k, l \in \{1, 2\}$，都有 $(R_I)^l_{ijk} = 0$。把此一結果代入 (2)，可知 R_I 是一個零張量場。

我們也可用 (1) 證明 R_I 是零張量場。設 $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$、$v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 和 $w = w^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ 為任意 2 維向量場。讀者可自行驗證，利用 (1) 以及《數學示例：列維-奇維塔聯絡》中有關 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上「關於某向量場的協變導數」的計算公式 (下式可從上述網頁的 (2) 推導而來)：

$$\nabla_v w = v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (6)$$

和《數學示例：向量場的李導數》中有關「李括號」的計算公式 (下式等於上述網頁的 (23))：

$$[v, w] = \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (7)$$

可求得 $R_I(u, v)(w) = 0$。由此可知,對任何微分 1 形式 α,必有 $R_I(u, v)(w)(\alpha) = 0$，因此 R_I 是零張量場。以上結果顯示，$(\mathbb{R}^2, g_I)$ 是平坦黎曼流形，這符合我們對 $\mathbb{R}^2$ 空間的直觀認識 (我們一般把這個空間稱為「平面」)。

接著考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中討論過的另一個流形 $H = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 > 0\}$ 以及其上的以下龐加萊度量 (下式等於上述網頁 (9) 中的 g_{III})：

$$g_{II} = \frac{1}{(x^2)^2} \left(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \right) \qquad (8)$$

根據上述網頁，在 (H, g_{II}) 上，我們有 $(\Gamma_{II})^2_{11} = \frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{12} = (\Gamma_{II})^1_{21} = (\Gamma_{II})^2_{22} = -\frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{11} = (\Gamma_{II})^1_{22} = (\Gamma_{II})^2_{12} = (\Gamma_{II})^2_{21} = 0$。以下讓我們用 (3) 計算 $(R_{II})^2_{121}$ 如下：

$$\begin{aligned}
(R_{II})^2_{121} &= \frac{\partial (\Gamma_{II})^2_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial (\Gamma_{II})^2_{11}}{\partial x^2} + (\Gamma_{II})^p_{21} (\Gamma_{II})^2_{1p} - (\Gamma_{II})^p_{11} (\Gamma_{II})^2_{2p} \\
&= -\frac{\partial (\Gamma_{II})^2_{11}}{\partial x^2} + (\Gamma_{II})^1_{21} (\Gamma_{II})^2_{11} - (\Gamma_{II})^2_{11} (\Gamma_{II})^2_{22} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{x^2} \right) + \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) - \left(\frac{1}{x^2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\
&= \frac{1}{(x^2)^2}
\end{aligned}$$

除了第二類黎曼曲率外，亦有第一類黎曼曲率(Riemannian curvature of the first kind)，以下記作 Rm，這是 M 上的一個 $(0,4)$ 張量場，使得給定 M 上的四個向量場 u、v、w 和 s，我們有

$$Rm(u,v,w,s) = g(R(u,v)(w),s) \qquad (9)$$

在上式等號右端，$R(u,v)(w)$ 如前所述是向量場，把黎曼度量 g 作用於這個向量場和另一向量場 s，所得結果應是一個 M 上實值函數，而這應等於等號左端的式子，由此可見等號左端的 Rm 是以四個向量場為論元並輸出一個 M 上實值函數的函數，故為 $(0,4)$ 張量場。

類似前面的情況，作為 $(0,4)$ 張量場，Rm 也可以寫成以下形式：

$$Rm = R_{ijkl}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \qquad (10)$$

其中 R_{ijkl} 是 Rm 的分量[2]，可用以下公式計算[3]：

$$R_{ijkl} = g_{pl} R^p_{ijk} \qquad (11)$$

不難證明，以上兩種表示法具有以下關係：

$$Rm\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = R_{ijkl} \qquad (12)$$

以下我們將主要使用第二種表示形式。

以前面討論過的 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 為例，由於 R_I 如前所述是零張量場，根據 (11)，容易看到 Rm_I 也是零張量場。接著考慮前面討論過的 (H, g_{II})，讓我們用 (11) 計算 $(R_{II})_{1212}$ 如下：

$$\begin{aligned}
(R_{II})_{1212} &= (g_{II})_{p2}(R_{II})^p_{121} \\
&= (g_{II})_{12}(R_{II})^1_{121} + (g_{II})_{22}(R_{II})^2_{121} \\
&= 0 + \frac{1}{(x^2)^2} \times \frac{1}{(x^2)^2} \\
&= \frac{1}{(x^2)^4}
\end{aligned}$$

[2]為免使符號過於複雜，以下把 Rm 的分量寫成 R_{ijkl} (而非 Rm_{ijkl}) 的形式。由於 R_{ijkl} 的指標採下標形式，可知它必定代表 $(0,4)$ 張量場的分量，因此不會把 R_{ijkl} 誤作為 $(1,3)$ 張量場 R 的分量。

[3]其實 R_{ijkl} 還有一個類似 (3) 的計算公式，這個公式使用「第一類克里斯多福符號」(而非 (3) 中的「第二類克里斯多福符號」)。但由於我們沒有介紹第一類克里斯多福符號，所以這裡不介紹此公式。

根據以上的討論，R 和 Rm 的分量分別具有 R^l_{ijk} 和 R_{ijkl} 的形式。對於 m 維流形來說，i、j、k 和 l 各可取 m 個值，因此 R 和 Rm 各有 m^4 個分量。據此 2 維流形便有 $2^4 = 16$ 個分量，這似乎意味著 R 和 Rm 涉及大量計算工作。但幸好 R 和 Rm 有很多對稱之處，以下只介紹 Rm 的情況，這是以下定理的內容。

定理 1：設 M、g、∇ 和 Rm 如上定義，u、v、w 和 s 為 M 上的向量場，則

(i) $Rm(u, v, w, s) = -Rm(v, u, w, s)$ 以及 $R_{ijkl} = -R_{jikl}$

(ii) $Rm(u, v, w, s) = -Rm(u, v, s, w)$ 以及 $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

(iii) $Rm(u, v, w, s) = Rm(w, s, u, v)$ 以及 $R_{ijkl} = R_{klij}$

上述定理可以概括為：Rm 關於其首兩個論元以及其分量的首兩個指標反對稱，Rm 關於其末兩個論元以及其分量的末兩個指標反對稱，Rm 關於其首二和末二兩組論元以及其分量的首二和末二兩組指標對稱。

上述定理大大減省了 Rm 及其分量的計算量。以 2 維流形的情況為例，根據 (i) 和 (ii)，無須計算便可知道 R_{1111}、R_{1112}、R_{1121}、R_{1122}、R_{1211}、R_{1222}、R_{2111}、R_{2122}、R_{2211}、R_{2212}、R_{2221}、R_{2222} 這 12 個分量都等於 0。此外，根據上述定理，還有 $R_{2112} = R_{1221} = -R_{1212}$ 以及 $R_{2121} = R_{1212}$。總上所述，雖然任意 2 維流形的 Rm 共有 16 個分量，但實際上只須計算 1 個分量 (例如 R_{1212})。以 (H, g_{II}) 為例，我們在前面計算了 $(R_{II})_{1212} = \frac{1}{(x^2)^4}$，由此可得 $(R_{II})_{2121} = \frac{1}{(x^2)^4}$，$(R_{II})_{2112} = (R_{II})_{1221} = -\frac{1}{(x^2)^4}$ 以及對其他 i、j、k、l，$(R_{II})_{ijkl} = 0$。利用 (10) 和上述計算結果，可以寫出 Rm_{II} 如下：

$$
\begin{aligned}
Rm_{II} \;=\; & \frac{1}{(x^2)^4}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 - dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \\
& -dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

數式 (11) 提供了把第二類黎曼曲率的分量轉化成第一類黎曼曲率分量的方法。反過來，也可以用下式把第一類黎曼曲率的分量轉化成第二類黎曼曲率的分量：

$$R^l_{ijk} = g^{pl} R_{ijkp} \qquad (14)$$

其中 g^{pl} 是逆度量 g^{-1} 的分量。根據《數學示例：黎曼度量》，我們有 (下式等於上述網頁 (20) 中的 ${g_{III}}^{-1}$)：

$$ {g_{II}}^{-1} = (x^2)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \qquad (15)$$

由此根據 (14) 和以上有關 Rm_{II} 各個分量的結果，容易求得 $(R_{II})^1_{212} = (R_{II})^2_{121} = \frac{1}{(x^2)^2}, (R_{II})^1_{122} = (R_{II})^2_{211} = -\frac{1}{(x^2)^2}$ 以及對其他 i、j、k、l, $(R_{II})^l_{ijk} = 0$。利用 (2) 和上述計算結果，可以寫出 R_{II} 如下：

$$\begin{aligned} R_{II} &= \frac{1}{(x^2)^2}\left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1\otimes dx^2\otimes dx^2+\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2\otimes dx^1\otimes dx^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1\otimes dx^2\otimes dx^1-\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2\otimes dx^1\otimes dx^1\right) \end{aligned} \qquad (16)$$

從第一類黎曼曲率可以導出我們在《數學示例：高斯曲率與平均曲率》介紹的「高斯曲率」。設 M 為 2 維曲面，g 和 Rm 如上定義，則 M 的高斯曲率(Gaussian curvature)，以下記作 K，可用以下公式計算：

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2} \qquad (17)$$

以 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 為例，根據前面的討論，我們知道 Rm_I 是零張量場，故有 $(R_I)_{1212} = 0$，由此根據 (5) 和 (17)，可知

$$K_I = 0$$

另外又如 (H, g_{II})，根據前面的計算，$(R_{II})_{1212} = \frac{1}{(x^2)^4}$，由此根據 (8) 和 (17)，可知

$$\begin{aligned} K_{II} &= -\frac{(R_{II})_{1212}}{(g_{II})_{11}(g_{II})_{22}-((g_{II})_{12})^2}\\ &= -\frac{\frac{1}{(x^2)^4}}{\frac{1}{(x^2)^2}\times\frac{1}{(x^2)^2}-0^2}\\ &= -1 \end{aligned}$$

我們在《數學示例：高斯曲率與平均曲率》中曾指出，平面和偽球面的高斯曲率分別恆為 0 和 -1，它們分別體現「歐幾里得幾何」和「雙曲幾何」的特點。上述計算結果正好與此一論述吻合。因為 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 正好是平面，而 (H, g_{II}) 正好是雙曲幾何的模型。

黎曼曲率除了體現為向量沿不同路徑進行平行移動所產生的差異外，也體現為二階協變導數分量對交換性的偏離。根據數學分析中的「克萊羅定理」，若 f 是光滑函數，則 f 的任意二階偏導數具有交換性，即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i} = 0 \qquad (18)$$

為方便把上述概念推廣到協變導數，首先寫出 f 的二階外導數如下 (下式可以根據《數學示例：外導數》中的 (2) 和 (5) 對 f 求兩次外導數而得)：

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i \wedge dx^j \qquad (19)$$

從上式可以看到，我們在數學分析學習的二階偏導數 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ 其實可被看成二階外導數 $d^2 f$ 的分量，因此 (18) 可被表述為：對調 $d^2 f$ 的某個分量的兩個下標 i 和 j 後，所得結果等於原來的分量。

類似外導數的情況，我們也可求二階協變導數。根據《數學示例：協變導數》，若 $T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$ 是 (r, s) 張量場，則 T 的協變導數 ∇T 是具有以下形式的 $(r, s+1)$ 張量場 (下式等於上述網頁的 (17))：

$$\nabla T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^{j_{s+1}} \qquad (20)$$

我們可以再對 ∇T 求協變導數 $\nabla^2 T$，它是具有以下形式的 $(r, s+2)$ 張量場：

$$\nabla^2 T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1};\, j_{s+2}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^{j_{s+1}} \otimes dx^{j_{s+2}} \qquad (21)$$

在上式中，$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1};\, j_{s+2}}$ 是 $\nabla^2 T$ 的分量，在下標 j_{s+1} 和 j_{s+2} 前各帶有一個 ; 號，代表先後就坐標 $x^{j_{s+1}}$ 和 $x^{j_{s+2}}$ 進行求協變導數的運算。跟外導數的情況不同，對調 $\nabla^2 T$ 的分量 $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1};\, j_{s+2}}$ 中的下標 j_{s+1} 和 j_{s+2} 後，所得結果不一定等於原來的分量。這即是說，$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1};\, j_{s+2}} - T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+2};\, j_{s+1}}$ 不一定等於 0。有趣的是，上述差值可用第二類黎曼曲率來表示，這是以下定理的內容。

定理 2：設 M、g、∇ 和 R 如上定義，則[4]

$$\begin{aligned} & T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1};\, j_{s+2}} - T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+2};\, j_{s+1}} \\ = & \sum_{q=1}^{r} R^{i_q}_{j_{s+2}\, j_{s+1}\, p}\, T^{i_1 \ldots i_{q-1}\, p\, i_{q+1} \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} - \sum_{q=1}^{s} R^{p}_{j_{s+2}\, j_{s+1}\, j_q}\, T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{q-1}\, p\, j_{q+1} \ldots j_s} \end{aligned} \qquad (22)$$

舉例說，根據前面的討論，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，R_I 是零張量場，因此若把上式應用於 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上的光滑實值函數 f (亦即 $(0, 0)$ 張量場)，我們有

$$f_{;j;i} - f_{;i;j} = 0 \qquad (23)$$

[4]請注意如果 ∇ 是一般的「聯絡」，那麼 (22) 還應減去一個包含「撓率」(torsion) 張量場分量的項。但由於我們規定了 ∇ 是「列維-奇維塔聯絡」(事實上，我們在《數學示例：列維-奇維塔聯絡》中沒有介紹一般的「聯絡」)，在此情況下，撓率張量場為零張量場，所以 (22) 無需減去這樣的項。

另一方面，根據《數學示例：協變導數》，我們有 $f_{;j}=\frac{\partial f}{\partial x^j}$，由此可進一步得到 $f_{;j;i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ 和 $f_{;i;j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$。把這兩個結果代入上式，便可得到 (18)，由此可見 (18) 所示的「克萊羅定理」可被看成上述定理的特例。由此還可進一步推斷，在任何平坦黎曼流形上，任意 (r,s) 張量場的二階協變導數的分量都滿足某種類似 (18) 所示的交換性。

接著考慮一個不滿足交換性的例子，讓我們計算 (H,g_{II}) 上任意向量場 v 的二階協變導數的以下兩個分量之差：$v^2_{;2;1}-v^2_{;1;2}$。根據《數學示例：協變導數》，在 (H,g_{II}) 上，我們有以下一階協變導數：$v^1_{;1}=\frac{\partial v^1}{\partial x^1}-\frac{v^2}{x^2}$，$v^1_{;2}=\frac{\partial v^1}{\partial x^2}-\frac{v^1}{x^2}$、$v^2_{;1}=\frac{\partial v^2}{\partial x^1}+\frac{v^1}{x^2}$ 和 $v^2_{;2}=\frac{\partial v^2}{\partial x^2}-\frac{v^2}{x^2}$。為求上述二階協變導數，可以採用以下公式 (下式等於上述網頁的 (18))：

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;\,j_{s+1}}=\frac{\partial T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x^{j_{s+1}}}+\sum_{q=1}^{r}\Gamma^{i_q}_{j_{s+1}\,p}\,T^{i_1\ldots i_{q-1}\,p\,i_{q+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}-\sum_{q=1}^{s}\Gamma^{p}_{j_{s+1}\,j_q}\,T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{q-1}\,p\,j_{q+1}\ldots j_s} \qquad (24)$$

由於 $v^2_{;2}$ 是一個 $(1,1)$ 張量場的分量，我們用上式求 $v^2_{;2;1}$ 如下：

$$\begin{aligned}
v^2_{;2;1} &= (v^2_{;2})_{;1}\\
&= \frac{\partial v^2_{;2}}{\partial x^1}+(\Gamma_{II})^2_{11}v^1_{;2}+(\Gamma_{II})^2_{12}v^2_{;2}-(\Gamma_{II})^1_{12}v^2_{;1}-(\Gamma_{II})^2_{12}v^2_{;2}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2}-\frac{v^2}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2}-\frac{v^1}{x^2}\right)+0-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1}+\frac{v^1}{x^2}\right)-0\\
&= \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^1 \partial x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial v^1}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

請讀者自行驗證，$v^2_{;1;2}=\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2 \partial x^1}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial v^1}{\partial x^2}-\frac{v^1}{(x^2)^2}$。一方面，把以上兩個結果直接相減，可得

$$v^2_{;2;1}-v^2_{;1;2}=\frac{v^1}{(x^2)^2} \qquad (25)$$

另一方面，利用 (22)，可得

$$\begin{aligned}
v^2_{;2;1}-v^2_{;1;2} &= (R_{II})^2_{121}v^1+(R_{II})^2_{122}v^2\\
&= \left(\frac{1}{(x^2)^2}\right)(v^1)+0\\
&= \frac{v^1}{(x^2)^2} \qquad (26)
\end{aligned}$$

以上結果與 (25) 一致，由此驗證了 (22)。

連結至數學專題
連結至周家發網頁