數學示例：可分變項與可分核

我們在《數學示例：積分／和分因子》中介紹了用積分／和分因子求解 1 階線性常微分／差分方程的通用方法，上述方法不適用於非線性方程。不過，對於具有某些特定形式的 1 階方程，我們仍有特定的求解方法。本文主旨是介紹具有這些特定形式的微分／差分／積分／和分方程的求解方法。

本文討論的微分方程是具有可分變項(separable variable) 的 1 階常微分方程 (這種方程亦可稱為「可分方程」separable equation)，這是指可表示成以下形式的方程：

$$Df(x) = g(x) \times h(f(x)) \qquad (1)$$

其中 $g(x)$ 代表某個以 x 作為變項的已知函數，$h(f(x))$ 代表某個以未知函數 $f(x)$ 作為變項的的已知函數。由於上式右端可被寫成上述兩個函數的乘積，故稱「可分」。舉例說，以下非線性微分方程

$$Df(x) - (f(x))^2 + 4 = 0 \qquad (2)$$

是可分的，因為可以把上式改寫成以下形式：

$$Df(x) = (f(x))^2 - 4 \qquad (3)$$

由此可以看到，就 (2) 而言，$g(x) = 1$，$h(x) = x^2 - 4$。

為求解 (1)，先把它寫成以下形式：

$$\left(\frac{1}{h(x)} \circ f(x)\right) \times Df(x) = g(x) \qquad (4)$$

接著根據求導數算子 D 與不定積分算子 $\int$ 的互逆性以及求導數的「鏈式法則」(見《數學示例：微分／差分運算法則》中的「定理 1(iii)」)，把上式改寫並繼續求解如下[1]：

$$\left(D\left(\int \frac{1}{h(x)}\right) \circ f(x)\right) \times Df(x) \quad = \quad g(x)$$

[1]一般有關微分方程的教科書是把 $Df(x)$ 寫成 $\frac{df}{dx}$，並從而把 (4) 寫成 $\frac{df}{h(f)} = g(x)dx$ 的形式，然後對等號兩端同時進行不定積分運算，從而推導出 (5)。本文不採用 $\frac{df}{dx}$ 的形式，所以不採用上述推導方法。

$$
\begin{aligned}
D\left(\left(\int \frac{1}{h(x)}\right)\circ f(x)\right) &= g(x)\\
\left(\int \frac{1}{h(x)}\right)\circ f(x) &= \int g(x) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

如能從上式解出 $f(x)$ (不一定是「初等函數解」，即表示成初等函數的組合的解)，所得結果就是 (1) 的 (通常意義下的) 解，稱為顯式解(explicit solution)，否則可以把上式 (經化簡後) 看成 (1) 的 (寬泛意義下的) 解，稱為隱式解(implicit solution)。

以 (2) 為例，根據前面的討論，該方程可以改寫成 (3) 的形式。把 $g(x)=1$ 和 $h(x)=x^2-4$ 代入 (5)，並進行計算如下[2]：

$$
\begin{aligned}
\left(\int \frac{1}{x^2-4}\right)\circ f(x) &= \int 1\\
\left(\int \left(\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}\right)\right)\circ f(x) &= \int 1\\
\left(\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|\right)\circ f(x) &= x+c_1\\
\left(\frac{1}{4}\ln|f(x)-2|-\frac{1}{4}\ln|f(x)+2|\right) &= x+c_1\\
\ln\left|\frac{f(x)-2}{f(x)+2}\right| &= 4x+4c_1\\
\frac{f(x)-2}{f(x)+2} &= \pm e^{4c_1}e^{4x}
\end{aligned}
$$

把上面最後一行中的 $\pm e^{4c_1}$ 換成另一任意常數 c_2，便可把上面最後一行寫成較簡潔的形式：

$$
\frac{f(x)-2}{f(x)+2} = c_2e^{4x} \qquad (6)
$$

從上式解出 $f(x)$，便可得到 (2) 的顯式通解如下：

$$
f(x) = \frac{2+2c_2e^{4x}}{1-c_2e^{4x}} \qquad (7)
$$

接下來看一個只能求得隱式解的非線性微分方程的例子：

$$
(e^{2f(x)}+1)Df(x)-xe^{f(x)}=0 \qquad (8)
$$

[2]以下計算要應用分解「部分分式」(partial fraction) 的技巧，即假設 $\frac{1}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$，然後解出 a 和 b。

上式可以改寫成以下形式：

$$Df(x) = x \times \frac{e^{f(x)}}{e^{2f(x)}+1} \qquad (9)$$

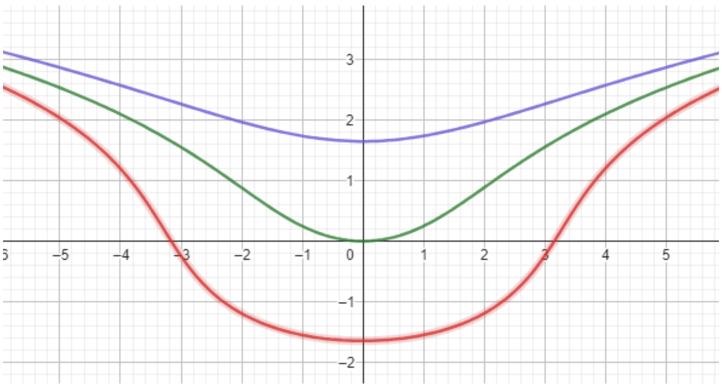
由此可以看到就 (8) 而言，$g(x) = x$，$h(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$。把上述的 $g(x)$ 和 $h(x)$ 代入 (5)，並進行計算如下：

$$\begin{aligned}
\left(\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}\right) \circ f(x) &= \int x \\
\left(\int (e^x + e^{-x})\right) \circ f(x) &= \int x \\
(e^x - e^{-x}) \circ f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
e^{f(x)} - e^{-f(x)} &= \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (10)
\end{aligned}$$

由於無法從上式解出 $f(x)$，可以把上式看作 (8) 的隱式通解。如用 y 坐標表示 $f(x)$ 的值，那麼上式可被看成代表以下帶有參數 c 的二維曲線族：

$$e^y - e^{-y} - \frac{1}{2}x^2 = c \qquad (11)$$

下圖展示上述曲線取 $c = 0$ (綠色)、$c = 5$ (藍色) 和 $c = -5$ (紅色) 時的圖象：



由於差分運算沒有類似「鏈式法則」的運算法則，我們不能為差分方程推導出 (5) 那樣的結果。不過，如果某個差分方程可以改寫成以下形式[3]：

$$Eh(f(x)) - h(f(x)) = g(x) \qquad (12)$$

[3]過程中可能需要運用 $Eh(f(x)) = h(Ef(x))$ 此一關係，這是合理的，因為根據 E 的定義，$Eh(f(x))$ 和 $h(Ef(x))$ 都等於 $h(f(x+1))$。

便可根據 $E-I=\Delta$ 此一定義，把上式改寫並繼續求解如下：

$$\begin{aligned}\Delta h(f(x)) &= g(x) \\ h(f(x)) &= \sum g(x) \qquad (13)\end{aligned}$$

如能從上式解出 $f(x)$ (不一定是初等函數解)，所得結果就是原方程的顯式解，否則可以把上式 (經化簡後) 看成原方程的隱式解。

舉例說，考慮以下非線性差分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (17))：

$$Ef(x)-f(x)+xf(x)Ef(x)=0 \qquad (14)$$

這個方程可以改寫成以下形式：

$$\frac{1}{Ef(x)}-\frac{1}{f(x)}=x \qquad (15)$$

上式具有 (12) 的形式 (其中 $h(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=x$)，因此可以用上述方法繼續求解如下：

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{f(x)}\right) &= x \\ \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{2}x^2+c \\ f(x) &= \frac{2}{x^2+2c} \qquad (16)\end{aligned}$$

上面最後一行就是 (14) 的顯式通解。

接下來看一個其解並非初等函數解的非線性差分方程的例子：

$$2^{Ef(x)}-x2^{f(x)}=0,\ \ x\in\mathbb{N} \qquad (17)$$

我們把上式一步一步改寫如下：

$$\begin{aligned}2^{Ef(x)} &= x2^{f(x)} \\ \frac{2^{Ef(x)}}{2^{f(x)}} &= x \\ 2^{Ef(x)-f(x)} &= x \\ Ef(x)-f(x) &= \log_2 x \qquad (18)\end{aligned}$$

上面最後一行具有 (12) 的形式 (其中 $h(x)=x$，$g(x)=\log_2 x$)，因此可以用上述方法繼續求解如下：

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \log_2 x \\ f(x) &= \log_2 \Gamma(x)+c \end{aligned} \qquad (19)$$

上面最後一行就是 (17) 的顯式通解，請注意這不是初等函數解 (因為 $\Gamma(x)$ 不是初等函數)。

接下來討論具有可分核(separable kernel) 的「弗雷德霍姆積分方程」，這是指具有以下一般形式的積分方程：

$$f(x)+\int_{t=a}^{t=b} K(x,t)\Phi(f(t))+g(x)=0 \qquad (20)$$

其中 a 和 b 是常數，Φ 是以未知函數 $f(x)$ 作為論元的給定 (線性或非線性) 函數，$g(x)$ 是以 x 作為論元的給定函數 (以下把這個函數稱為「非齊次項」)，$K(x,t)$ 則是給定的可寫成以下形式的「可分核」：

$$K(x,t)=h_1(x)k_1(t)+\ldots+h_n(x)k_n(x) \qquad (21)$$

上式由有限個項相加而成，其中每一項都是某個以 x 作為變項的函數 $h_i(x)$ 與另一個以 t 作為變項的函數 $k_i(t)$ 的乘積。

在 (20) 中，如果 $g(x)=0$，有關方程稱為「齊次方程」，否則稱為「非齊次方程」。容易看到，零函數必然是齊次方程的解，因此以下只討論非齊次方程。由於 (20) 中的積分是關於 t 的積分，我們可以把可分核中每一項的 $h_i(x)$ 抽到積分算子外面，即把 (20) 中的方程寫成以下形式：

$$f(x)+\left(h_1(x)\int_{t=a}^{t=b} k_1(t)\Phi(f(t))\right)+\ldots+\left(h_n(x)\int_{t=a}^{t=b} k_n(t)\Phi(f(t))\right)+g(x)=0 \qquad (22)$$

由於上式中的 n 個積分都是關於 t 的定積分，而所有被積函數都只包含變項 t，這些定積分的結果必然是常數。現在如定義以下常數：

$$\begin{aligned} c_1 &= \textstyle\int_{t=a}^{t=b} k_1(t)\Phi(f(t)) \\ &\vdots \\ c_n &= \textstyle\int_{t=a}^{t=b} k_n(t)\Phi(f(t)) \end{aligned} \qquad (23)$$

那麼可以把 (22) 進一步改寫成

$$f(x)=-c_1h_1(x)-\ldots-c_nh_n(x)-g(x) \qquad (24)$$

從上式可以看到，如能確定 c_1、...、c_n，那麼上式就是 (20) 的解。為確定上述 c_i，可以把 (24) 代入 (23)，並從而解出 c_i。

舉例說，考慮以下線性積分方程[4](以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (12))：

$$f(x)-\int_{t=0^+}^{t=1}\ln(xt)f(t)-1=0,\ \ x\in(0,\infty) \qquad (25)$$

上述方程的可分核 $-\ln(xt)$ 可以改寫成包含兩項的形式：$-\ln x-\ln t$，由此有 $h_1(x)=-\ln x$、$k_1(t)=1$、$h_2(x)=-1$ 和 $k_2(t)=\ln t$。根據 (23)，定義以下常數：

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{t=0^+}^{t=1} f(t) \qquad (26)\\ c_2 &= \int_{t=0^+}^{t=1} \ln t f(t) \qquad (27)\end{aligned}$$

由此可把 (25) 中的方程改寫成

$$f(x)=c_1\ln x+c_2+1 \qquad (28)$$

為解出 c_1 和 c_2，把上式依次代入 (26) 和 (27) 並計算如下：

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{t=0^+}^{t=1}(c_1\ln t+c_2+1)\\ &= [c_1(t\ln t-t)+(c_2+1)t]_{0^+}^1\\ &= -c_1+c_2+1 \qquad (29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_{t=0^+}^{t=1}(c_1(\ln t)^2+(c_2+1)\ln t)\\ &= [c_1(t(\ln t)^2-2t\ln t+2t)+(c_2+1)(t\ln t-t)]_{0^+}^1\\ &= 2c_1-c_2-1 \qquad (30)\end{aligned}$$

從 (29) 和 (30)，我們有以下 1 次方程組：

$$\begin{cases} 2c_1-c_2=1\\ -2c_1+2c_2=-1\end{cases} \qquad (31)$$

[4](25) 中的積分下限 0^+ 代表這個積分實際上是以下「右極限」(即有關函數從 0 的右邊趨向 0 的極限值)：

$$\lim_{s\to 0^+}\int_{t=s}^{t=1}\ln(xt)f(t)$$

解此方程組，可得 $c_1 = \frac{1}{2}$，$c_2 = 0$。把此一結果代入 (28)，便可得到 (25) 的解如下：

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln x + 1 \qquad (32)$$

接下來考慮以下非線性積分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (18))：

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=1} xt(f(t))^2 - \frac{7}{8}x = 0 \qquad (33)$$

上述方程的可分核 $-\frac{1}{2}xt$ 僅包含一項，由此有 $h(x) = -\frac{1}{2}x$ 和 $k(t) = t$。根據 (23)，定義以下常數：

$$c = \int_{t=0}^{t=1} t(f(t))^2 \qquad (34)$$

由此可把 (33) 中的方程改寫成

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}cx + \frac{7}{8}x \\ &= \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)x \qquad (35) \end{aligned}$$

為解出 c，把上式代入 (34) 並計算如下：

$$\begin{aligned} c &= \int_{t=0}^{t=1} t\left(\left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)t\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)^2 \int_{t=0}^{t=1} t^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)^2 \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)^2 \times \frac{1}{4} \qquad (36) \end{aligned}$$

從上面最後一行，可得到以下 2 次方程：

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}c^2 - \frac{25}{32}c + \frac{49}{256} &= 0 \\ (4c-1)(4c-49) &= 0 \qquad (37) \end{aligned}$$

解上述方程，可得 $c = \frac{1}{4}$ 和 $c = \frac{49}{4}$ 這兩個根。把這兩個根依次代入 (35)，便可得到 (33) 的兩個解如下：

$$f(x) = x, \quad f(x) = 7x \qquad (38)$$

上述解題技巧也適用於具有可分核的「弗雷德霍姆和分方程」，這是指具有以下一般形式的和分方程：

$$f(x)+\sum_{t=a}^{t=b} K(x,t)\Phi(f(t))+g(x)=0 \qquad (39)$$

其中的 $K(x,t)$ 也具有 (21) 的形式。在 (39) 中，如果 $g(x)=0$，有關方程稱為「齊次方程」，否則稱為「非齊次方程」。類似積分方程的情況，以下只討論非齊次方程，並且把可分核中每一項的 $h_i(x)$ 抽到和分算子外面，即把 (39) 中的方程寫成以下形式：

$$f(x)+\left(h_1(x)\sum_{t=a}^{t=b} k_1(t)\Phi(f(t))\right)+\ldots+\left(h_n(x)\sum_{t=a}^{t=b} k_n(t)\Phi(f(t))\right)+g(x)=0 \qquad (40)$$

接著如定義以下常數：

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & \sum_{t=a}^{t=b} k_1(t)\Phi(f(t)) \\ & \vdots & \\ c_n & = & \sum_{t=a}^{t=b} k_n(t)\Phi(f(t)) \end{array} \qquad (41)$$

便可以把 (40) 進一步改寫成 (下式等於前面的 (24))：

$$f(x)=-c_1h_1(x)-\ldots-c_nh_n(x)-g(x) \qquad (42)$$

如能確定 c_1、...、c_n，那麼 (42) 就是 (39) 的解。為確定上述 c_i，可以把 (42) 代入 (41)，並從而解出 c_i。

舉例說，考慮以下線性和分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (15))：

$$f(x)-\sum_{t=0}^{t=4}(1+xt)f(t)-1=0 \qquad (43)$$

上述方程的可分核 $-1-xt$ 包含兩項，由此有 $h_1(x)=-1$、$k_1(t)=1$、$h_2(x)=-x$ 和 $k_2(t)=t$。根據 (41)，定義以下常數：

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=4} f(t) \qquad (44)$$

$$c_2 = \sum_{t=0}^{t=4} tf(t) \qquad (45)$$

由此可把 (43) 中的方程改寫成

$$f(x) = c_1 + c_2 x + 1 \qquad (46)$$

為解出 c_1 和 c_2，把上式依次代入 (44) 和 (45) 並計算如下[5]：

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{t=0}^{t=4} (c_1 + c_2 t + 1) \\ &= \left[(c_1+1)t + \frac{c_2 t^2}{2} \right]_0^5 \\ &= 5c_1 + 5 + 10c_2 \qquad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \sum_{t=0}^{t=4} t(c_1 + c_2 t + 1) \\ &= \sum_{t=0}^{t=4} ((c_1+1)t + c_2 t^2) \\ &= \left[\frac{(c_1+1)t^2}{2} + \frac{c_2 t(t-1)(2t-1)}{6} \right]_0^5 \\ &= 10c_1 + 10 + 30c_2 \qquad (48) \end{aligned}$$

從 (47) 和 (48)，我們有以下 1 次方程組：

$$\begin{cases} -4c_1 - 10c_2 = 5 \\ -10c_1 - 29c_2 = 10 \end{cases} \qquad (49)$$

解此方程組，可得 $c_1 = -\frac{45}{16}$，$c_2 = \frac{5}{8}$。把此一結果代入 (46)，便可得到 (43) 的解如下：

$$f(x) = \frac{5}{8}x - \frac{29}{16} \qquad (50)$$

接下來考慮以下非線性和分方程：

$$f(x) + \sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^2 - 1 = 0 \qquad (51)$$

[5]以下計算要應用《數學示例：積分／和分運算法則》中的 (6) (但須把其中的 x 改為 t，設定 $h=1$，並把任意周期函數 $p(x)$ 改為任意常數 c)：

$$\sum t^2 = \frac{t(t-1)(2t-1)}{6} + c$$

上述方程的可分核 t 僅包含一項，由此有 $h(x)=1$ 和 $k(t)=t$。根據 (41)，定義以下常數：

$$c=\sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^2 \qquad (52)$$

由此可把 (51) 中的方程改寫成

$$f(x)=1-c \qquad (53)$$

為解出 c，把上式代入 (52) 並計算如下：

$$\begin{aligned} c &= \sum_{t=0}^{t=20} t(1-c)^2 \\ &= (1-c)^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{21} \\ &= 210(1-c)^2 \qquad (54) \end{aligned}$$

從上面最後一行，可得到以下 2 次方程：

$$\begin{aligned} 210c^2-421c+210 &= 0 \\ (15c-14)(14c-15) &= 0 \qquad (55) \end{aligned}$$

解上述方程，可得 $c=\frac{14}{15}$ 和 $c=\frac{15}{14}$ 這兩個根。把這兩個根依次代入 (53)，便可得到 (51) 的兩個解如下：

$$f(x)=\frac{1}{15}, \quad f(x)=-\frac{1}{14} \qquad (56)$$

請注意以上兩個解都是常值函數[6]。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[6](51) 其實也可以用以下方法求解：由於在確定函數 $f(x)$ 後，$\sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^2$ 是常數，(51) 實質具有以下形式：$f(x)=$ 常數，因此待求函數 $f(x)$ 必然是常值函數，故可先設定 $f(x)=k$。把此一設定代入 (51)，可得

$$k+k^2\sum_{t=0}^{t=20} t-1=0$$

從上式可得到以下 2 次方程：

$$210k^2+k-1=0$$

解上述方程，同樣可得 (56) 所示結果。