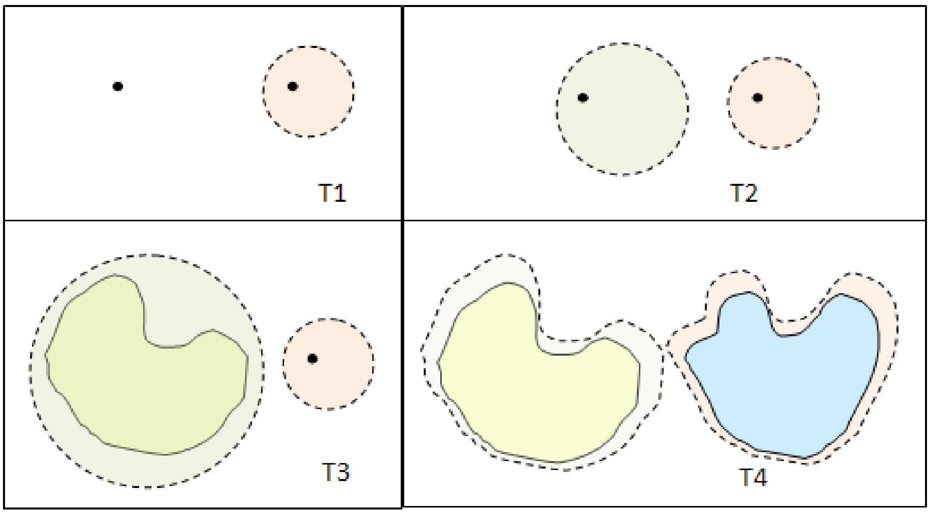
數學示例：分離公理

我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了拓樸空間須滿足的四條公理，這些是拓樸學中最基本的公理。可是，單靠這些公理，只能得到最一般的拓樸空間。為得到內容更豐富的拓樸空間，須在這些公理之上加入其他限制條件。舉例說，我們在《數學示例：連通性》和《數學示例：緊致性》中介紹的「連通性」和「緊致性」就是限制條件的例子。

本文主旨是介紹四條稱為分離公理(separation axiom) 的限制條件，這些限制條件都是有關使用開集來分離拓樸空間上的點或閉集，每一條限制條件都對應著一種拓樸空間。傳統把這些限制條件稱為「公理」，這是因為在拓樸學的早期發展階段，這些限制條件曾經像《數學示例：拓樸空間》中的四條公理那樣被用來作為拓樸空間的定義。請注意在今天這些分離公理雖然仍保留「公理」的名稱，但其實已失去公理的地位，跟其他限制條件如連通性、緊致性等無異。

以下介紹的四條分離公理依次稱為 T_1、T_2、T_3 和 T_4 公理，以下是這四條公理的示意圖：



在上圖中，虛線包圍的範圍代表開集，實線包圍的範圍則代表閉集。上圖

顯示 T_1 和 T_2 描述空間中兩個元素間的關係，T_3 描述空間中一個元素與一個閉集間的關係，T_4 則描述空間中兩個閉集間的關係。讀者在閱讀下文對四條分離公理的介紹時，請回顧上圖，以比較這四條公理之間的異同。上圖也可作為這四條公理的例證。

第一條分離公理是「T_1 公理」：設 x 是拓樸空間 X 上的元素，y 是 X 上相異於 x 的元素，則存在 X 上的開集 U，使得下式成立：

$$x \in U \ \wedge \ y \notin U \qquad (1)$$

我們把滿足 T_1 公理的空間稱為弗雷歇(Fréchet) 空間。請注意在上述公理中，x 與 y 的關係其實是對稱的，即若「y 是 X 上相異於 x 的元素」，則必有「x 是 X 上相異於 y 的元素」，反之亦然。因此在一個包括相異點 x 和 y 的弗雷歇空間中，除了存在滿足 (1) 的開集 U 外，必也存在另一個開集 V，使得下式成立：

$$y \in V \ \wedge \ x \notin V \qquad (2)$$

事實上，為清晰起見，有些人把 (1) 和 (2) 合起來作為弗雷歇空間所須滿足的條件。

很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，其中 $\mathcal{T}_s$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 的「標準拓樸」(standard topology，即由全體開球組成的拓樸基生成的拓樸)，都是弗雷歇空間。舉例說，上面左上角的圖便是 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_s)$ 作為弗雷歇空間的例證，該圖顯示 $\mathbb{R}^2$ 上的兩點。由於這左、右兩點是相異的兩點，它們之間必定存在一定距離，只要選取足夠小的長度作為包括這兩點中一點的開球的半徑，便可得到滿足 (1)(或 (2)) 的開集，例如該圖便顯示一個只包括右點而不包括左點的橙色開球。

此外，弗雷歇空間還滿足以下定理。

定理 1：設 X 為拓樸空間，則 X 是弗雷歇空間當且僅當 X 的任何有限子集都是閉集。

根據上述定理，可知「密著拓樸空間」$(X_1, \mathcal{T}_1)$，其中 $X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$，$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{\spadesuit, \heartsuit\}\}$，不是弗雷歇空間，這是因為 X_1 的有限子集 $\{\spadesuit\}$ 不是閉集。此外，由於如前所述，$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 是弗雷歇空間，從上述定理可知 $\mathbb{R}^n$ 的任何有限子集都是閉集。

接下來讓我們證明上述定理。首先，設 X 是弗雷歇空間，並設 x 和 y 為 X 中相異的元素。由於 X 滿足 T_1 公理，故有 X 上開集 V 使得 (2) 成立，由此必有 $V \cap \{x\} = \emptyset$。至此我們找到一個包括 y 但不與 $\{x\}$ 相交的

開集 (即 V)，因此 y 不是 $\{x\}$ 的閉包點[1]。由於 y 是任意的元素，這即是說 X 中除了 x 外，其他元素都不是 $\{x\}$ 的閉包點，因此有 $\overline{\{x\}} = \{x\}$。由此根據《數學示例：開集與閉集》的「定理 4(iii)」，可知單元集 $\{x\}$ 是閉集。由於 x 是任意的元素，可知 X 上任意單元集都是閉集。由於 X 的任何有限子集都可看成有限個單元集的并集，根據上述網頁的「定理 1(iv)」，可知 X 的任何有限子集都是閉集。

其次，設 X 的任何有限子集都是閉集，並設 x 和 y 為 X 中相異的元素，那麼 $\{y\}$ 是閉集。由此根據上述網頁的「定理 4(iii)」，有 $\overline{\{y\}} = \{y\}$，這即是說 x 不是 $\{y\}$ 的閉包點，由此根據閉包點的定義，必有開集 U 使得 $x \in U$ 並且 $U \cap \{y\} = \emptyset$，即 (1) 成立。至此證得 X 滿足 T_1 公理，所以是弗雷歇空間。

第二條分離公理是「T_2 公理」：設 x 和 y 是拓樸空間 X 上相異的兩點，則存在 X 上的開集 U 和 V，使得下式成立：

$$x \in U \ \wedge \ y \in V \ \wedge \ U \cap V = \emptyset \qquad (3)$$

我們把滿足 T_2 公理的空間稱為豪斯多夫(Hausdorff) 空間。

很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是豪斯多夫空間。舉例說，上面右上角的圖便是 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_s)$ 作為豪斯多夫空間的例證，該圖顯示 $\mathbb{R}^2$ 上的兩點，容易看到只要選取足夠小的長度作為分別包括這兩點的開球的半徑，便可得到滿足 (3) 的開集，例如該圖便顯示兩個開球，其中綠色開球包括左點，橙色開球則包括右點，而且這兩個開球互斥。

此外，若 T_2 公理成立，則 T_1 公理也成立，這一點可以用反證法來證明如下：設 (3) 成立並且 $y \in U$，那麼 $y \in U \cap V$，這與 $U \cap V = \emptyset$ 矛盾，故必有 $y \notin U$，即 (1) 成立。但反過來，若 T_1 公理成立，T_2 公理卻不一定成立。換句話說，任何豪斯多夫空間都是弗雷歇空間，但反之不必然。舉例說，以下拓樸空間便是弗雷歇空間但卻非豪斯多夫空間：$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$，其中

$$\mathcal{T}_f = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : U = \emptyset \vee \mathbb{R} - U \text{是有限集合}\}$$

上述定義的 $\mathcal{T}_f$ 稱為有限補拓樸(finite complement topology)，例如 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}-\{0\}$ 便屬於 $\mathcal{T}_f$,這是因為 $\mathbb{R}-\mathbb{R} = \emptyset$ 和 $\mathbb{R}-(\mathbb{R}-\{0\}) = \{0\}$ 都是有限集合。

以下讓我們證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 確有上述性質。首先，設 x 和 y 為兩個相異實數，那麼設定 $U_1 = \mathbb{R} - \{y\}$ 和 $V_1 = \mathbb{R} - \{x\}$。容易驗證 U_1 和 V_1 均為

[1]根據《數學示例：開集與閉集》，元素 y 是集合 S 的閉包點當且僅當任何包括 y 的開集 V 都與 S 相交。此外，根據該網頁，我們用 $\overline{S}$ 代表 S 的閉包，即 S 的閉包點組成的集合。

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 上的開集，而且 $x \in U_1 \wedge y \notin U_1$，由此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 是弗雷歇空間。其次，考慮 $\mathbb{R}$ 上 0 和 1 這兩點，設 U_2 和 V_2 分別為 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 上包括 0 和 1 的任意開集，那麼 $U_2 = \mathbb{R} - \{u_1, \ldots, u_n\}$，$V_2 = \mathbb{R} - \{v_1, \ldots, v_m\}$，其中 u_1、...、u_n、v_1、...、v_m 是有限個實數。由於 U_2 和 V_2 都是 $\mathbb{R}$ 減去有限個實數而得的集合，它們必共有無窮多個實數，因此 $U_2 \cap V_2 \neq \emptyset$，由此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 不是豪斯多夫空間。

豪斯多夫空間是拓樸學中非常重要的拓樸空間子類，因為這種空間滿足數學分析中的一些重要性質。舉例說，在數學分析中，實數序列的斂散性是一個重要課題，不同實數序列各有不同的斂散性，但我們知道，如果某個實數序列是收斂的 (即有極限)，那麼它的極限必是唯一確定的。舉例說，實數序列

$$s_1 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

便是以 0 作為極限，它不可能再有另一個極限。請注意上述情況其實是豪斯多夫空間中的普遍性質，這是以下定理的內容。

定理 2：設 X 為豪斯多夫空間，s 是以 X 中元素作為項的序列。若 s 有極限，那麼這個極限是唯一確定的。

上述定理要用到一般拓樸空間中「序列極限」的概念，為方便討論，這裡先提供此一概念的定義。設 s 為以拓樸空間 X 的元素作為項的序列，並設 $x \in X$。如果給定 X 上任何包括 x 的開集 U_x，都總能找到一個正整數 N，使得若 $n \geq N$，則 s 的第 n 項必屬於 U_x，我們便說 x 是 s 的極限。以前面的序列 s_1 為例，讀者可自行驗證，0 滿足上述序列極限的定義，例如如果給定包括 0 的開集 $U_0 = (-0.1, 0.1)$，那麼可以設定 $N = 11$，這是因為若 $n \geq 11$，則 s_1 的第 n 項 (即 $\frac{1}{n}$) 必屬於 U_0。

有些讀者可能覺得難以想像存在以多個不同數值作為極限的序列，但在 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 中確有這種情況 (前面我們證明了這個拓樸空間不是豪斯多夫空間)。考慮以下序列

$$s_2 = (1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$$

上述序列在標準實數空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ 中沒有極限，但有趣的是，s_2 在 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 中卻有極限，而且任何實數都是 s_2 的極限，現證明如下。設 $x \in \mathbb{R}$，並設 U_x 為 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 上包括 x 的開集。由於 $U_x \in \mathcal{T}_f$，$\mathbb{R} - U_x$ 是有限集，假設 $\mathbb{R} - U_x = \{x_1, \ldots, x_k\}$。如果 $\max\{x_1, \ldots, x_k\} < 1$，設 $N = 1$，否則設 N 為大於 $\max\{x_1, \ldots, x_k\}$ 的最小正整數，那麼對任何滿足 $n \geq N$ 的正整數，都有 $n \notin \mathbb{R} - U_x$，即 $n \in U_x$，但 n 等於 s_2 的第 n 項。至此我們證明了，給定 $\mathbb{R}$ 上任何包括 x 的開集 U_x，都總能找到一個正整數 N，使得若 $n \geq N$，則 s_2 的第 n 項 (即 n) 必屬於 U_x，因此 x 是 s_2 的極限。

豪斯多夫性質的另一個重要特點是它是一種拓樸性質。我們在《數學示例：連通性》的「定理 3」和《數學示例：緊致性》的「定理 2」中曾指出連續函數把連通空間和緊致空間分別映射為連通空間和緊致空間，並進而推出連通性和緊致性是拓樸性質。豪斯多夫空間的情況有所不同，請看以下定理。

定理 3：設 X 和 Y 為拓樸空間，$f : X \to Y$ 為一一連續函數，若 Y 是豪斯多夫空間，則 X 也是豪斯多夫空間。

從上述定理，不能推出連續函數把豪斯多夫空間映射為豪斯多夫空間。但如果 f 是同胚，便可以得到較強的結果。根據同胚的定義 (參見《數學示例：連續函數與同胚》)，一方面，我們有 f 是一一到上的連續函數，因此根據上述定理，可知若 Y 是豪斯多夫空間，則 X 也是豪斯多夫空間；另一方面，我們也有 $f^{-1} : Y \to X$ 是一一到上的連續函數，因此根據上述定理，可知若 X 是豪斯多夫空間，則 Y 也是豪斯多夫空間。由此證得以下定理。

定理 4：若 $f : X \to Y$ 是同胚，那麼 X 是豪斯多夫空間當且僅當 Y 是豪斯多夫空間。

由此可見，豪斯多夫性質是拓樸性質。

第三條分離公理是「T_3 公理」：設某拓樸空間 X 的任何有限子集均為閉集，$x \in X$ 並且 C 是 X 上不包括 x 的閉集，則存在 X 上的開集 U 和 V，使得下式成立：

$$x \in U \ \wedge \ C \subseteq V \ \wedge \ U \cap V = \emptyset \qquad (4)$$

我們把滿足 T_3 公理的空間稱為正則豪斯多夫(regular Hausdorff) 空間。

很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是正則豪斯多夫空間。舉例說，上面左下角的圖便是 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_s)$ 作為正則豪斯多夫空間的例證，該圖顯示 $\mathbb{R}^2$ 上的一個黃色閉集和一點，容易看到只要選取足夠小的長度作為分別包括這點和包含這個閉集的開球的半徑，便可得到滿足 (4) 的開集，例如該圖便顯示兩個開球，其中綠色開球包含黃色閉集，橙色開球則包括該點，而且這兩個開球互斥。

此外，若 T_3 公理成立，則 T_2 公理也成立，現證明如下。設 T_3 公理成立，並且 x 和 y 為 X 中相異的兩點。由於有限集 $\{y\}$ 是閉集，根據 T_3 公理，必有開集 U 和 V 使得 $x \in U \wedge \{y\} \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset$，但此一結果等同於 (3)，因為根據集合論，$\{y\} \subseteq V$ 等價於 $y \in V$，由此證得 T_2 公理成立。

請注意 T_3 公理所包含的條件「拓樸空間 X 的任何有限子集均為閉集」

是用來確保「若 T_3 公理真，則 T_2 公理也真」此一蘊涵關係 (此一條件也出現於下文將要介紹的 T_4 公理，它在 T_4 公理中起著相似的作用)。換句話說，如果沒有這個條件，即僅有 (4) 成立，則上述蘊涵關係不成立。

以前面討論過的密著拓樸空間 $(X_1, \mathcal{T}_1)$ 為例,一方面,這個空間並不滿足上述條件,但卻滿足 (4)。一方面,對於 $\spadesuit$ 來說,只有 $\emptyset$ 是這個空間上不包括這點的閉集。現在設 $U_3 = X_1$ 和 $V_3 = \emptyset$,那麼我們有 $\spadesuit \in U_3 \wedge \emptyset \subseteq V_3 \wedge U_3 \cap V_3 = \emptyset$。對於 $\heartsuit$ 來說，也可作出相同的結論，因此 (4) 成立。另一方面，$(X_1, \mathcal{T}_1)$ 卻不滿足 (3)，這是因為在 X_1 上只有 X_1 是包括 $\spadesuit$ 的開集，也只有 X_1 是包括 $\heartsuit$ 的開集，而 $X_1 \cap X_1 \neq \emptyset$。

反過來，若 T_2 公理成立，T_3 公理卻不一定成立。因此任何正則豪斯多夫空間都是豪斯多夫空間空間，但反之不必然。舉例說，以下拓樸空間便是豪斯多夫空間但卻非正則豪斯多夫空間：$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$,其中 $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$,而 $\mathcal{T}_K$ 則稱為K 拓樸(K-topology),這個拓樸是由拓樸基 $\mathcal{B}_K$ 生成的拓樸,其中 $\mathcal{B}_K$ 包括所有形如 (a, b) 和 $(c, d) - K$ 的集合 (其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，$(a, b)$ 和 (c, d) 是開區間)，例如 $(-3, -2)$ 和 $(0, 1) - K$ 便是 $\mathcal{B}_K$ 的成員。請注意根據《數學示例：拓樸空間》中的「定理 1」,$\mathcal{T}_K$ 包括 $\mathcal{B}_K$ 中任意多個成員的并集。

以下讓我們證明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 確有上述性質。首先，設 x 和 y 為兩個相異實數並且 $d = |x - y|$ 是它們之間的距離，那麼設定 $U_4 = (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$ 和 $V_4 = (y - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2})$。容易驗證 U_4 和 V_4 均為 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 上的開集，而且 $x \in U_4 \wedge y \in V_4 \wedge U_4 \cap V_4 = \emptyset$，由此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 是豪斯多夫空間。

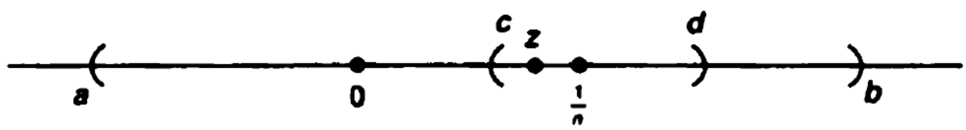
其次，考慮 $\mathbb{R}$ 上 0 這一點和 K 這個集合，其中 $0 \notin K$。由於 $\mathbb{R} - K$ 可以寫成以下無窮多個集合的并集：

$$\ldots \cup ((-2, 0) - K) \cup ((-1, 1) - K) \cup ((0, 2) - K) \cup ((1, 3) - K) \cup \ldots$$

而每個 $(a, b) - K$ 都是開集 (因為它是 $\mathcal{B}_K$ 的成員)，所以 $\mathbb{R} - K$ 是開集，由此可知 K 是 $\mathbb{R}$ 上的閉集。為用反證法，假設存在 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 上的開集 U_5 和 V_5 使得下式成立：

$$0 \in U_5 \wedge K \subseteq V_5 \wedge U_5 \cap V_5 = \emptyset \qquad (5)$$

並由此導出矛盾，下圖可幫助理解以下證明：



由於 $0 \in U_5$，而 U_5 等於 $\mathcal{B}_K$ 中某些成員的并集，故必有 $\mathcal{B}_K$ 的某個成員

$(a,b)-K$，使得 $0 \in (a,b)-K \subseteq U_5$ [2]。選取足夠大的 n 使得 $\frac{1}{n} \in (a,b)$。由於 $\frac{1}{n} \in K \subseteq V_5$，而 V_5 也等於 $\mathcal{B}_K$ 中某些成員的并集，故必有 $\mathcal{B}_K$ 中的成員 (c,d)，使得 $\frac{1}{n} \in (c,d) \subseteq V_5$ [3]，而且由於 $\frac{1}{n} > 0$，必能找到滿足上述條件以及 $c > 0$ 的開區間 (c,d) [4]。

接著取 z，使得 $z < \frac{1}{n}$ 並且 $z > \max\{c, \frac{1}{n+1}\}$。由於 $a < c < z < \frac{1}{n} < b$，故有 $z \in (a,b)$；又由於 $\frac{1}{n+1} < z < \frac{1}{n}$，故有 $z \notin K$；綜合以上兩點，故有 $z \in (a,b)-K \subseteq U_5$。此外，由於 $c < z < \frac{1}{n}$，必有 $z \in (c,d) \subseteq V_5$。至此我們找到 $z \in U_5 \cap V_5$，此一結果與 (5) 矛盾，由此證得 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ 不是正則豪斯多夫空間。

正則豪斯多夫空間還有一種重要性質，但由於這種性質涉及一條可數性公理，這要在引入該公理後才能介紹，請參閱《數學示例：可數性公理》。最後介紹第四條分離公理－「T_4 公理」：設某拓樸空間 X 的任何有限子集均為閉集，C 和 D 為 X 上互斥的閉集，則存在 X 上的開集 U 和 V，使得下式成立：

$$C \subseteq U \ \wedge \ D \subseteq V \ \wedge \ U \cap V = \emptyset \qquad (6)$$

我們把滿足 T_4 公理的空間稱為正規豪斯多夫(normal Hausdorff) 空間。

很多我們熟悉的拓樸空間，例如 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_s)$ 及其子空間，都是正規豪斯多夫空間。舉例說，上面右下角的圖便是 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_s)$ 作為正規豪斯多夫空間的例證，該圖顯示 $\mathbb{R}^2$ 上的一個黃色閉集和一個藍色閉集，由於這兩個閉集互斥，即使從這兩個閉集中各選一點出來使得這兩點的距離最接近，這兩點之間也必有一定距離，因此我們可以選取滿足 (6) 的適當開集，例如該圖便顯示兩個開集，其中綠色開集包含黃色閉集，橙色開集則包含藍色閉集，而且這兩個開集互斥。

像前述三類空間一樣，正規豪斯多夫空間也有一些獨特性質，而且正規豪斯多夫性質也有重要的理論意義，但由於這些性質和理論涉及較高深的概念，本文不擬作深入介紹。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[2]這裡不能取 $\mathcal{B}_K$ 中形如 (a,b) 的成員，這是因為包括 0 的任何開區間 (a,b) 都必與 K 相交，因而不可能有 $(a,b) \subseteq U_5$。

[3]這裡不能取 $\mathcal{B}_K$ 中形如 $(c,d)-K$ 的成員，這是因為 $\frac{1}{n} \in K$，因而不可能有 $\frac{1}{n} \in (c,d)-K$。

[4]如果我們最初找到的 (c,d) 滿足 $\frac{1}{n} \in (c,d) \subseteq V_5$ 但不滿足 $c > 0$，那麼可以另找一個大於 0 但小於 $\frac{1}{n}$ 的 c'，並以 (c',d) 取代 (c,d)。請注意 (c',d) 必滿足 $\frac{1}{n} \in (c',d) \subseteq V_5$ 以及 $c' > 0$。