

## 數學示例：變項分離法

我們在《數學示例：含任意函數的解》中介紹了求解偏微分／差分方程通解的方法，本文主旨是介紹另一種可用來求解某些偏微分／差分方程「邊值問題」或「初值-邊值問題」的方法，稱為變項分離法(separation of variables method)，這種方法的主要原理是假設  $m$  元未知函數  $f(x_1, \dots, x_m)$  可寫成以下形式：

$$f(x_1, \dots, x_m) = X_1(x_1) \times \dots \times X_m(x_m) \quad (1)$$

其中的  $X_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 為僅包含一個論元  $x_i$  的函數，把上式右端代入方程中，從而設法把原來的偏微分／差分方程轉化為  $m$  個常微分／差分方程。把這些方程逐一求解後並把結果相乘，便得到原來方程的解。

我們先從齊次方程齊次邊值問題說起，考慮以下 2 階偏微分方程初值-邊值問題。請注意以下問題既包含邊界條件，又包含初始條件 (以下用；號區隔這兩類條件)，故稱初值-邊值問題(initial-boundary value problem)：

$$\begin{aligned} 3(D_x)^2 f(x, y) + D_y f(x, y) &= 0, \quad x \in (-\pi, \pi), \\ f(-\pi, y) - f(\pi, y) &= 0, D_x f(-\pi, y) - D_x f(\pi, y) = 0; \quad f(x, 0) = 2 \sin(3x) \end{aligned} \quad (2)$$

為求解上述方程，先假設  $f(x, y)$  可寫成以下形式：

$$f(x, y) = X(x) \times Y(y) \quad (3)$$

把 (3) 代入 (2) 第一行中的方程，把全式除以  $3X(x) \times Y(y)$ ，並加以整理，可得以下等式：

$$\begin{aligned} 3D^2 X(x) \times Y(y) + X(x) \times DY(y) &= 0 \\ -\frac{D^2 X(x)}{X(x)} &= \frac{DY(y)}{3Y(y)} \end{aligned}$$

由於上式等號左、右兩端分別為僅包含論元  $x$  和  $y$  的函數，只有當這兩個函數值等於同一個任意常數 (設為  $\lambda$  時)，上述等式才能成立，因此我們有

$$\frac{D^2 X(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{DY(y)}{3Y(y)} = \lambda \quad (4)$$

從以上兩個等式可得到以下兩個常微分方程：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (5)$$

$$DY(y) - 3\lambda Y(y) = 0 \quad (6)$$

我們先處理 (5)，把 (3) 代入 (2) 中的兩個邊界條件，把全式除以  $Y(y)$ ，並把結果加入到 (5) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad X(-\pi) - X(\pi) = 0, \quad DX(-\pi) - DX(\pi) = 0 \quad (7)$$

請注意上式包含可變化的參數  $\lambda$ ，隨著  $\lambda$  變化，上述邊值問題有時只有平凡解  $X(x) = 0$ ，有時則有非平凡解，因此先要找出所有令上式有非平凡解的  $\lambda$ ，然後再求相對應的非平凡解，這樣的  $\lambda$  和相對應的非平凡解正是我們在《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》中介紹的「特徵值」和「特徵函數」，因此可用該網頁的方法求解上述問題。事實上，上述問題實質上等於該網頁 (37) 中的邊值問題。根據上述網頁的 (38)，(7) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & X_0(x) &= 1 \\ \lambda_n &= n^2 \quad (n = 1, 2, \dots), & X_{n,1}(x) &= \cos(nx), \quad X_{n,2}(x) = \sin(nx) \end{aligned} \quad (8)$$

接下來把 (8) 中的特徵值  $\lambda_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 逐一代入 (6)，並運用《數學示例：基本解集》中介紹的方法，以求得對應每個  $\lambda_n$ ，(6) 的解如下：

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & Y_0(y) &= 1 \\ \lambda_n &= n^2 \quad (n = 1, 2, \dots), & Y_n(y) &= e^{3n^2y} \end{aligned} \quad (9)$$

至此求得對應不同特徵值  $\lambda$  的  $X(x)$  和  $Y(y)$ 。根據 (3)，把對應的  $X(x)$  和  $Y(y)$  相乘，便可得到 (2) (撇除其初始條件) 的一個解。由於這些解的任何線性組合都是解，可以把 (2) (撇除其初始條件) 的解寫成以下一般形式：

$$f(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1} e^{3n^2y} \cos(nx) + c_{n,2} e^{3n^2y} \sin(nx)) \quad (10)$$

其中  $c_0$ 、 $c_{n,1}$ 、 $c_{n,2}$  等是任意常數。接著把 (2) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1} \cos(nx) + c_{n,2} \sin(nx)) = 2 \sin(3x) \quad (11)$$

比較上式等號兩端的係數，容易求得除了  $c_{3,2} = 2$  外，上式中所有其他係數都等於 0。把上述結果代入 (10)，便可最終求得 (2) 的解為

$$f(x, y) = 2e^{27y} \sin(3x) \quad (12)$$

在上例中，很容易便解出 (11) 中的各個係數，在其他情況下，求解係數的過程會較複雜，需要應用《數學示例：傅立葉級數》中介紹的「傅立葉級數」概念。舉例說，考慮以下  $x$  和  $y$  的階分別為 2 和 1 的偏差分方程初值-邊值問題：

$$E_x f(x, y) - 2f(x, y) + (E_x)^{-1} f(x, y) + E_y f(x, y) = 0, \quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \\ f(0, y) = 0, f(4, y) = 0; \quad f(x, 0) = x^3 - 4x^2 \quad (13)$$

像上例一樣，先假設  $f(x, y)$  可寫成 (3) 的形式。把 (3) 代入 (13) 第一行中的方程，把全式除以  $X(x) \times Y(y)$ ，並加以整理，可得以下等式：

$$\frac{EX(x)}{X(x)} - 2 + \frac{E^{-1}X(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{EY(y)}{Y(y)} = \lambda \quad (14)$$

從以上兩個等式可得到以下兩個常差分方程：

$$EX(x) + (\lambda - 2)X(x) + E^{-1}X(x) = 0 \quad (15)$$

$$EY(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (16)$$

我們先處理 (15)，把 (3) 代入 (13) 中的兩個邊界條件，把全式除以  $Y(y)$ ，並把結果加入到 (15) 中，可得到以下 2 階常差分方程邊值問題：

$$EX(x) + (\lambda - 2)X(x) + E^{-1}X(x) = 0, \quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \quad X(0) = 0, X(4) = 0 \quad (17)$$

上述問題實質上等於《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》(17) 中的邊值問題。根據上述網頁的 (19)，(17) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 - \sqrt{2}, & X_1(x) &= \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ \lambda_2 &= 2, & X_2(x) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ \lambda_3 &= 2 + \sqrt{2}, & X_3(x) &= \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

為方便後面另一例題的計算，以下也提供 (17) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列 (等於《數學示例：傅立葉級數》中的 (18))：

$$(2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}), \quad \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \right) \quad (19)$$

接下來把 (18) 中的特徵值  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 逐一代入 (16)，容易求得對應每個  $\lambda_n$ ，我們有 (16) 的解如下：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 - \sqrt{2}, & Y_1(y) &= (2 - \sqrt{2})^y \\ \lambda_2 &= 2, & Y_2(y) &= 2^y \\ \lambda_3 &= 2 + \sqrt{2}, & Y_3(y) &= (2 + \sqrt{2})^y \end{aligned} \quad (20)$$

根據 (3)，把對應的  $X(x)$  和  $Y(y)$  相乘並且寫出這些乘積的線性組合，由此可以把 (13) (撇除其初始條件) 的解寫成以下一般形式：

$$f(x, y) = c_1(2-\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3(2+\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \quad (21)$$

接著把 (13) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) = x^3 - 4x^2 \quad (22)$$

為求解上式中的三個常數，可以運用《數學示例：傅立葉級數》中介紹的方法。事實上，我們在該網頁已求解上述問題，根據該網頁的 (21)，我們有  $c_1 = -4 - 3\sqrt{2}$ ,  $c_2 = 3$ ,  $c_3 = 4 - 3\sqrt{2}$ 。把上述結果代入 (21)，便可最終求得 (13) 的解為

$$\begin{aligned} f(x, y) = & (-4 - 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ & + (4 - 3\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \quad (23) \end{aligned}$$

以上的例子都只涉及 2 元函數，接下來看一個涉及 3 元函數的例子，請考慮以下 3 元偏微分方程邊值問題：

$$\begin{aligned} (D_x)^2 f(x, y, z) + (D_y)^2 f(x, y, z) + (D_z)^2 f(x, y, z) &= 0, \quad x, y, z \in (0, 1), \\ f(0, y, z) = 0, f(1, y, z) = 0, f(x, 0, z) = 0, f(x, 1, z) &= 0, \\ f(x, y, 0) = 0, f(x, y, 1) = \pi^2 xy &\quad (24) \end{aligned}$$

類似前面的情況，假設  $f(x, y, z)$  可寫成以下形式：

$$f(x, y, z) = X(x) \times Y(y) \times Z(z) \quad (25)$$

把 (25) 代入 (24) 第一行中的方程，把全式除以  $X(x) \times Y(y) \times Z(z)$ ，並加以整理，可得以下等式：

$$-\frac{D^2 X(x)}{X(x)} - \frac{D^2 Y(y)}{Y(y)} = \frac{D^2 Z(z)}{Z(z)}$$

類似前面的情況，上式等號左右兩端必然等於同一個常數。不僅如此，由於上式等號左端是兩個分別僅包含論元  $x$  和  $y$  的函數之和，這兩個函數值必然也都是常數。總上所述，我們有以下等式：

$$\frac{D^2 X(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{D^2 Y(y)}{Y(y)} = -\mu, \quad \frac{D^2 Z(z)}{Z(z)} = \lambda + \mu \quad (26)$$

從以上三個等式可得到以下三個常微分方程：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (27)$$

$$D^2Y(y) + \mu Y(y) = 0 \quad (28)$$

$$D^2Z(z) - (\lambda + \mu)Z(z) = 0 \quad (29)$$

我們先處理 (27)，把 (25) 代入 (24) 第二行中的首兩個邊界條件，把全式除以  $Y(y) \times Z(z)$ ，並把結果加入到 (27) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad X(0) = 0, X(1) = 0 \quad (30)$$

接著可以沿用《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》中的方法求解上述問題。讀者可自行驗證，當  $\lambda = 0$  和  $\lambda < 0$  時，上述問題只有平凡解  $X(x) = 0$ ；當  $\lambda = n^2\pi^2$  時 (其中  $n \in \mathbb{N}$ )，上述問題有非平凡解  $X(x) = \sin(n\pi x)$ ，由此可見 (30) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (31)$$

為方便以下計算，這裡運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (1) 求上述特徵函數的範數如下：

$$\|\sin(n\pi x)\| = \sqrt{\int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (32)$$

從以上結果可得到 (30) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$(n^2\pi^2)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(n\pi x)\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (33)$$

類似地，從 (28) 和 (24) 第二行中的末兩個邊界條件可以得到一個類似 (30) 的 2 階常微分方程邊值問題，這個問題有以下特徵值序列和特徵函數正交歸一序列：

$$(m^2\pi^2)_{m \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(m\pi y)\right)_{m \in \mathbb{N}} \quad (34)$$

接下來把 (33) 和 (34) 中的特徵值  $n^2\pi^2$  和  $m^2\pi^2$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) 分別代入 (29) 中的  $\lambda$  和  $\mu$ ，把 (25) 代入 (24) 第三行中的第一個邊界條件，把全式除以  $X(x) \times Y(y)$ ，並把結果加入到 (29) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2Z(z) - (n^2 + m^2)\pi^2 Z(z) = 0, \quad z \in (0, 1), \quad Z(0) = 0 \quad (35)$$

上述方程 (撇除邊界條件) 的通解為  $Z(z) = c_1 e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi z} + c_2 e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi z}$ , 但為方便以下計算, 我們把這個通解改寫成以下形式<sup>1</sup>:

$$Z(z) = c_3 \cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) + c_4 \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \quad (36)$$

把  $Z(0) = 0$  代入上式, 可得  $c_3 = 0$ 。由此可知, 對應每個有序對  $(n, m)$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ), 我們有 (35) 的解 (略去任意常數) 如下:

$$Z_{n,m}(z) = \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \quad (37)$$

根據 (25), 把對應的  $X(x)$ 、 $Y(y)$  和  $Z(z)$  相乘並且寫出這些乘積的線性組合, 由此可以把 (24) (撇除其最後一個邊界條件) 的解寫成以下一般形式:

$$f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \quad (38)$$

接著把 (24) 第三行中的第二個邊界條件代入上式, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) = \pi^2 xy \quad (39)$$

為解出上式中的  $c_{n,m}$ , 先要寫出  $\pi^2 xy$  關於 (33) 和 (34) 中兩個正交歸一序列成員的二重傅立葉級數展開式, 即寫出  $\pi^2 xy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,m} \sqrt{2} \sin(n\pi x) \times \sqrt{2} \sin(m\pi y)$ 。運用《數學示例: 傅立葉級數》中的 (56), 可以計算  $d_{n,m}$  如下:

$$d_{n,m} = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \pi^2 xy \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \times \sqrt{2} \sin(m\pi y) = \frac{2 \times (-1)^{n+m}}{nm} \quad (40)$$

由此有

$$\pi^2 xy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \times (-1)^{n+m}}{nm} \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \times \sqrt{2} \sin(m\pi y) \quad (41)$$

把上式右端代入 (39) 右端, 可就每對  $n$ 、 $m$  得到以下方程:

$$c_{n,m} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right) = \frac{4 \times (-1)^{n+m}}{nm} \quad (42)$$

<sup>1</sup>根據雙曲函數的定義, 我們有  $e^x = \cosh x + \sinh x$  和  $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$ , 因此可以把  $e^x$  和  $e^{-x}$  的任意線性組合改寫成  $\cosh x$  和  $\sinh x$  的任意線性組合。

由此可解出  $c_{n,m} = \frac{4 \times (-1)^{n+m}}{nm \sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi)}$ 。把上述結果代入 (38)，便可最終求得 (24) 的解為

$$f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \times (-1)^{n+m}}{nm \sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi)} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi z) \quad (43)$$

以上討論的都是齊次偏微分/偏差分方程齊次邊值問題，接下來讓我們討論如何處理非齊次邊界條件及/或非齊次方程。對於非齊次邊界條件，可以把《數學示例：傅立葉級數》中處理非齊次邊界條件的方法推廣到偏微分/差分方程，其要旨是把未知函數  $f$  寫成兩部分之和： $f = g + h$ ，其中  $h$  是某個滿足非齊次條件的簡單函數（通常是多項式）。把  $g + h$  代入原有問題的  $f$ ，便可把原來的非齊次邊值問題轉化為齊次邊值問題。

舉例說，考慮以下  $x$  和  $y$  的階分別為 2 和 1 的非齊次偏差分方程初值-非齊次邊值問題：

$$\begin{aligned} E_x f(x, y) - 2f(x, y) + (E_x)^{-1} f(x, y) + E_y f(x, y) - 2x &= 0, \quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \\ f(0, y) = 0, f(4, y) = 8; \quad f(x, 0) = x^3 - 4x^2 \end{aligned} \quad (44)$$

為處理上列非齊次邊界條件，把未知函數  $f(x, y)$  寫成以下形式：

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y) \quad (45)$$

其中  $h(x, y)$  是滿足上列非齊次邊界條件的簡單函數。最簡單的情況是假設  $h(x, y)$  具有以下常係數 1 次多項式的形式： $h(x, y) = s_1 x + s_2$ 。把邊界條件  $h(0, y) = 0, h(4, y) = 8$  代入這個  $h(x, y)$ ，可求得  $s_1 = 2, s_2 = 0$ ，由此有

$$h(x, y) = 2x \quad (46)$$

把 (45) 和 (46) 代入 (44)，可得

$$\begin{aligned} E_x g(x, y) + 2(x+1) - 2g(x, y) - 2(2x) + (E_x)^{-1} g(x, y) + 2(x-1) \\ + E_y g(x, y) + 2x - 2x = 0, \quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \\ g(0, y) + 2 \times 0 = 0, g(4, y) + 2 \times 4 = 8; \quad g(x, 0) + 2x = x^3 - 4x^2 \end{aligned} \quad (47)$$

把上式加以整理，可得以下齊次偏差分方程初值-齊次邊值問題：

$$\begin{aligned} E_x g(x, y) - 2g(x, y) + (E_x)^{-1} g(x, y) + E_y g(x, y) = 0, \quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \\ g(0, y) = 0, g(4, y) = 0; \quad g(x, 0) = x^3 - 4x^2 - 2x \end{aligned} \quad (48)$$

若撇除其初始條件，上述問題與 (13) 大致相等（僅須把 (13) 中的  $f$  改為  $g$ ）。根據前面的討論，可知上述問題（撇除其初始條件）的解等於 (21) 的右端，即：

$$g(x, y) = c_1(2-\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3(2+\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \quad (49)$$

接著把 (48) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) = x^3 - 4x^2 - 2x \quad (50)$$

為解出上式中的  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ )，先要寫出  $x^3 - 4x^2 - 2x$  關於 (19) 中的正交歸一序列成員的傅立葉級數展開式，即寫出  $x^3 - 4x^2 - 2x = d_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + d_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + d_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ 。運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (9)，可以計算  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) 如下：

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_1^3 \left( (x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right) = -10 - 6\sqrt{2} \\ d_2 &= \sum_1^3 \left( (x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) = 5\sqrt{2} \\ d_3 &= \sum_1^3 \left( (x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \right) = -10 + 6\sqrt{2} \end{aligned} \quad (51)$$

由此有

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 2x &= (-10 - 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (-10 + 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \end{aligned} \quad (52)$$

把上式右端代入 (50) 右端，可求得  $c_1 = -6 - 5\sqrt{2}$ ,  $c_2 = 5$ ,  $c_3 = 6 - 5\sqrt{2}$ 。把上述結果代入 (49)，便可求得 (48) 的解為

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (-6 - 5\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (6 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \end{aligned} \quad (53)$$

最後，利用 (45)、(46) 和 (53)，便可求得 (44) 的解為

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (-6 - 5\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (6 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 2x \end{aligned} \quad (54)$$

對於非齊次方程，可以沿用前面的做法，把未知函數  $f$  寫成 (3) 的形式，並求與這個非齊次方程相關的齊次方程的特徵值和特徵函數。接著把未知函數寫成特徵函數的線性組合，並把方程的非齊次項寫成傅立葉級數展開式；然後把上述線性組合和展開式代入原來的方程，以解出未知函數。舉例說，考慮以下 2 階非齊次偏微分方程初值-齊次邊值問題：

$$\begin{aligned} (D_x)^2 f(x, y) - D_y f(x, y) + \frac{\pi}{2}(1-x)y &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ f(0, y) = 0, f(1, y) = 0; \quad f(x, 0) &= \frac{1}{\pi^3}(x-1) \end{aligned} \quad (55)$$

為求解上述問題，首先假設  $f(x, y)$  可寫成 (3) 的形式。把 (3) 代入與 (55) 相關聯的齊次方程 (即  $(D_x)^2 f(x, y) - D_y f(x, y) = 0$ )，把全式除以  $X(x) \times Y(y)$ ，並加以整理，可得以下等式：

$$\frac{D^2 X(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{DY(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (56)$$

從上面第一個等式可得到以下常微分方程：

$$D^2 X(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (57)$$

把 (3) 代入 (55) 中的兩個邊界條件，把全式除以  $Y(y)$ ，並把結果加入到 (57) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2 X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad X(0) = 0, X(1) = 0 \quad (58)$$

由於上述問題與 (30) 完全相同，可知上述問題的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列等於前面的 (33)。

由於 (55) 是非齊次方程，接下來不能沿用前面的方法處理 (56) 中的另一個等式。但仍可假設對應每個  $\lambda_n$ ，都有一個待求的  $Y_n(y)$ ，使得 (55) 的解可以表示成上述特徵函數與這些  $Y_n(y)$  的以下線性組合 (以下把 (33) 中正交歸一序列成員的係數  $\sqrt{2}$  吸收入  $Y_n(y)$  中)：

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(n\pi x) \quad (59)$$

另一方面，也寫出 (55) 中非齊次項  $\frac{\pi}{2}(1-x)y$  的傅立葉級數展開式，即寫出  $\frac{\pi}{2}(1-x)y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ 。為此，運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (9) 求  $d_n$  如下：

$$d_n = \int_{x=0}^{x=1} \left( \frac{\pi}{2}(1-x)y \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}n} y \quad (60)$$

由此可得

$$\frac{\pi}{2}(1-x)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} y \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad (61)$$

把 (59) 和 (61) 代入 (55) 的第一行並加以整理，可得

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left( n^2 \pi^2 Y_n(y) + DY_n(y) - \frac{1}{n} y \right) \sin(n\pi x) = 0 \quad (62)$$

由於在  $x \in (0, 1)$  的情況下， $\sin(n\pi x)$  不等於零函數，從上式可就每個  $n$  得到以下以  $Y_n(y)$  為未知函數的 1 階常係數非齊次常微分方程：

$$DY_n(y) + n^2\pi^2 Y_n(y) - \frac{1}{n}y = 0 \quad (63)$$

可以求得以上方程的通解為：

$$Y_n(y) = c_n e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4} \quad (64)$$

其中  $c_n$  是任意常數。把以上結果代入 (59)，可得 (55) (撇除其初始條件) 的通解如下：

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4} \right) \sin(n\pi x) \quad (65)$$

接著把 (55) 中的初始條件代入上式，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n - \frac{1}{n^5\pi^4} \right) \sin(n\pi x) = \frac{1}{\pi^3}(x-1) \quad (66)$$

為解出  $c_n$ ，可以寫出上式右端的傅立葉級數展開式，即寫出  $\frac{1}{\pi^3}(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ 。為此，再次運用上述網頁的 (9) 求  $b_n$  如下：

$$b_n = \int_{x=0}^{x=1} \left( \frac{1}{\pi^3}(x-1) \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{n\pi^4} \quad (67)$$

由此可得

$$\frac{1}{\pi^3}(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\sqrt{2}}{n\pi^4} \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right) \quad (68)$$

把上式右端代入 (66) 右端，可就每個  $n$  得到以下方程：

$$c_n - \frac{1}{n^5\pi^4} = -\frac{2}{n\pi^4} \quad (69)$$

由此可解出  $c_n = \frac{1-2n^4}{n^5\pi^4}$ 。把上述結果代入 (65)，便最終求得 (55) 的解為

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-2n^4}{n^5\pi^4} e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4} \right) \sin(n\pi x) \quad (70)$$

連結至數學專題  
連結至周家發網頁