數學示例：空間曲線的性質

我們在《數學示例：平面曲線的性質》中介紹了平面曲線的一個重要性質－「曲率」，此一概念也適用於三維空間中的曲線。此外，空間曲線還有一個平面曲線所沒有的性質－「撓率」,本文主旨是介紹空間曲線的上述兩種性質。

我們從空間曲線的單位向量說起。設 $Z(t)$ 為光滑正則的空間曲線參數化形式，那麼跟平面曲線的情況一樣，可以定義單位切向量如下 (下式與《數學示例：平面曲線的性質》中的 (1) 有相同的形式，但請注意，在三維空間中，以下向量包含三個分量)：

$$T(t) = \frac{Z'(t)}{\|Z'(t)\|} \qquad (1)$$

我們在上述網頁還定義了平面曲線單位法向量 $U(t)$，這是指把 $T(t)$ 按逆時針方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後所得的與 $T(t)$ 垂直的向量。可是，在三維空間中，難以討論逆／順時針方向，而且就任何向量而言，有無限多個向量與該向量垂直，因此如要為空間曲線合理地定義單位法向量，必須另闢蹊徑。

微分幾何的處理方法是定義另外兩個單位法向量，使得 $T(t)$ 與這兩個單位法向量互相垂直[1]。但在介紹這些單位法向量前，須先對 $Z(t)$ 加入一個附加條件：對定義域中任何 t 而言，$T'(t) \neq (0,0,0)$[2]，這是光滑性和正則性以外的另一個條件，用以保證以下定義中的數式不會以 0 為分母。第一個單位法向量稱為主法向量(principal normal vector)，以下記作 $P(t)$，其定義如下：

$$P(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \qquad (2)$$

上述定義的理據是《數學示例：平面曲線的性質》中的「定理 1」，根據該定理，由於 $T(t)$ 是單位向量而且 $T'(t) \neq (0,0,0)$，$T'(t)$ 是一個與 $T(t)$ 垂直的

[1]在三維空間中，最多只有三個向量可以互相垂直。

[2]請注意此一附加條件實質上把直線排除掉，這是因為任何直線都可表示成以下參數化形式：$Z(t) = (at+b, ct+d, et+f)$，其中 $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$，而對上述 $Z(t)$，必有 $T'(t) = (0,0,0)$；但由於直線本質上是一種平面曲線，所以在研究空間曲線時把它排除掉，不會引起多大問題。

向量,因此是法向量的自然選擇。把這個向量除以其模,便得到一個單位向量。

第二個單位法向量稱為副法向量(binormal vector),以下記作 $B(t)$,其定義是

$$B(t) = T(t) \times P(t) \qquad (3)$$

其中 $\times$ 代表向量的「叉積」(cross product)。根據向量代數中叉積的模的定義,$\|B(t)\| = \|T(t)\|\|P(t)\|\sin\theta$,其中 θ 為 $T(t)$ 與 $P(t)$ 的夾角。由於 $T(t)$ 和 $P(t)$ 是互相垂直的單位向量,故有 $\|B(t)\| = 1 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{2} = 1$,因此 $B(t)$ 是單位向量。此外,根據叉積的方向的定義,$B(t)$ 是同時與 $T(t)$ 和 $P(t)$ 垂直的向量,其方向符合以下「右手定則」(right-hand rule):當右手的姆指、食指和中指互相垂直而且姆指和食指分別指向 $T(t)$ 和 $P(t)$ 所指的方向時,中指的方向就是 $B(t)$ 的方向。

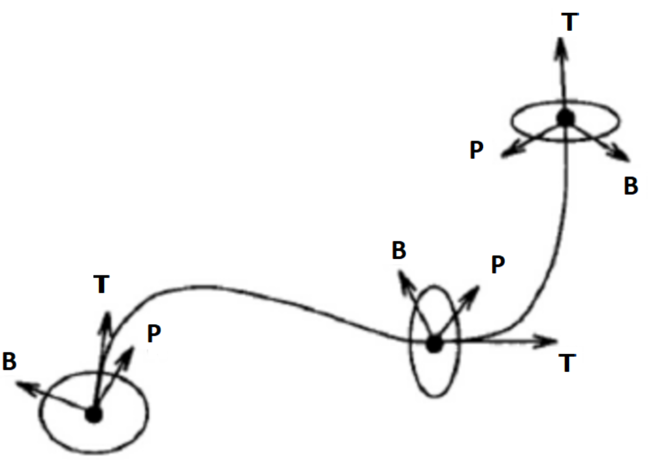
請注意從 (3) 以及向量叉積的運算法則,可以推導出上述三個單位向量之間叉積的一系列結果:

(i) $T(t) \times T(t) = P(t) \times P(t) = B(t) \times B(t) = 0$

(ii) $T(t) \times P(t) = B(t)$, $P(t) \times B(t) = T(t)$, $B(t) \times T(t) = P(t)$

(iii) $P(t) \times T(t) = -B(t)$, $B(t) \times P(t) = -T(t)$, $T(t) \times B(t) = -P(t)$

跟平面曲線的情況相似,一條空間曲線上的每一點都「寄生」著一個活動標架,稱為弗萊納-塞雷標架(Frenet-Serret frame),即由前述三個單位向量組成的集合 $\{T(t), P(t), B(t)\}$,下圖展示某空間曲線上的弗萊納-塞雷標架:



以我們在《數學示例:曲線的參數化》中討論過的圓螺旋線為例,假如沿用以下參數化形式 (其中 r 和 p 是正實數,請注意下式等於上述網頁 (15) 中的 Z_9):

$$Z_1 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_1(t) = (r\cos t, r\sin t, pt) \qquad (4)$$

首先計算

$$Z_1\text{'}(t) = (-r\sin t, r\cos t, p)$$
$$\|Z_1\text{'}(t)\| = \sqrt{r^2+p^2}$$

由此根據 (1)，有

$$T_1(t) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\right)$$

接著計算

$$T_1\text{'}(t) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, -\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, 0\right)$$
$$\|T_1\text{'}(t)\| = \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}$$

由此根據 (2)，有

$$P_1(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

接著要計算叉積，根據向量代數的知識，可以借助「行列式」(determinant) 來計算叉積。設向量 v 和 w 可分別寫成 $v_1i + v_2j + v_3k$ 和 $w_1i + w_2j + w_3k$ 的形式，其中 i、j 和 k 是笛卡爾坐標系下 x、y 和 z 軸上的單位向量，則[3]

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

接著根據上式計算 $T_1(t) \times P_1(t)$ 如下：

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t & \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t & \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ = \quad & \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t i - \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t j + \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}k \end{aligned}$$

[3]在笛卡爾坐標系下，向量可以寫成 $v_1i + v_2j + v_3k$ 的形式，也可以寫成 (v_1, v_2, v_3) 的形式。在運用下式進行計算時，要靈活運用此一對應關係。此外，以下提供 3×3 行列式的計算公式 (讀者也可參閱線性代數的書籍，以了解計算行列式的簡便方法)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

由此根據 (3)，可知

$$B_1(t) = \left(\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, -\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\right)$$

接下來利用上述三個單位向量的一階導數來定義空間曲線的性質。首先考慮 $T(t)$ 的一階導數，根據前面的 (2)，可知 $T'(t)$ 與 $P(T)$ 平行。事實上，我們有 $T'(t) = \|T'(t)\|P(t)$，這裡 $\|T'(t)\|$ 是這兩個向量之間的比例。類似平面曲線的情況，我們把這個比例除以曲線速率 $\|Z'(t)\|$ 所得的商定義為空面曲線的曲率(curvature)，記作 $\kappa(t)$，用以量度曲線彎曲的程度，即

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|Z'(t)\|} \qquad (6)$$

此外，根據上段的討論，也可以把 $\kappa(t)$ 的定義寫成下式：

$$T'(t) = \|Z'(t)\|\kappa(t)P(t) \qquad (7)$$

上式跟《數學示例：平面曲線的性質》中的公式 (4) 雖然有相似的形式，但兩者有很不同的意義。首先，這裡的 $P(t)$ 代表空間曲線上的「主法向量」，而上述網頁的 $U(t)$ 則代表平面曲線上的「平面曲線單位法向量」，兩者建基於不同的定義。其次，根據 (6)，這裡的 $\kappa(t)$ 的值必然是非負實數，而上述網頁的 $\kappa_s(t)$ 的值可以是負數。

以前面討論過的圓螺旋線為例，把上述計算結果代入 (6)，便可求得

$$\begin{aligned}\kappa_1(t) &= \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}} \div \sqrt{r^2+p^2} \\ &= \frac{r}{r^2+p^2}\end{aligned}$$

上述結果顯示圓螺旋線的曲率是常數。此外，當 $p = 0$ 時，(4) 退化成 x-y 平面上的 r 半徑圓，而上述結果也變成 $\kappa_1(t) = \frac{1}{r}$，這顯示圓形的曲率與其半徑 r 成反比關係，這與我們在《數學示例：平面曲線的性質》所得的結果吻合。

我們還可以從曲線的參數化形式推導出 $\kappa(t)$ 的計算公式。設 $Z(t)$ 為某空間曲線的參數化形式，那麼可以證明該曲線的曲率可用以下公式計算：

$$\kappa(t) = \frac{\|Z'(t) \times Z''(t)\|}{\|Z'(t)\|^3} \qquad (8)$$

有些讀者可能覺得上式跟我們在《數學示例：平面曲線的性質》提供的有向曲率 $\kappa_s(t)$ 的計算公式 (即該網頁的公式 (5)) 相差甚遠，這是因為上述公

式以整個向量 (而非其分量) 來表示，而 $\kappa_s(t)$ 的公式則以向量的分量來表示。事實上，如借用上面 (5) 的叉積計算公式以及向量模的定義，那麼可以把 $\kappa_s(t)$ 的公式改寫成以下形式[4]：

$$\kappa_s(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot k}{\|Z'(t)\|^3} \qquad (9)$$

比較以上兩式，可以看到兩個曲率公式其實有相似的結構，它們的分別在於 (8) 的分子是向量叉積的模，其值必然是非負實數；而 (9) 的分子則是 (8) 中叉積在 z 軸方向上的分量，其值可以是負數。

其次考慮 $B(t)$ 的一階導數，對 (3) 求導，可得[5]

$$\begin{aligned} B'(t) &= T'(t) \times P(t) + T(t) \times P'(t) \\ &= T(t) \times P'(t) \end{aligned}$$

根據叉積的定義，上式顯示 $B'(t)$ 與 $T(t)$ 互相垂直。另一方面，根據《數學示例：平面曲線的性質》中的「定理 1」，$B'(t)$ 又與 $B(t)$ 互相垂直。由於 $B'(t)$ 同時與 $T(t)$ 和 $B(t)$ 互相垂直，它必然與 $P(t)$ 平行，因此這兩個向量必具有 $B'(t) = f(t)P(t)$ 的關係，其中 $f(t)$ 是純量函數，代表這兩個向量之間的比例。在微分幾何中，把這個比例除以 $-\|Z'(t)\|$ 所得的商定義為空間曲線的撓率(torsion)，記作 $\tau(t)$，用以量度曲線偏離平面的程度。總上所述，$\tau(t)$ 滿足以下等式：

$$B'(t) = -\|Z'(t)\|\tau(t)P(t) \qquad (10)$$

以前面討論過的圓螺旋線為例，根據前面的計算結果，我們有

$$B_1'(t) = \left(\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, 0\right)$$

把上述計算結果代入 (10)，可得

$$\left(\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, 0\right) = \tau_1(t)(\sqrt{r^2+p^2}\cos t, \sqrt{r^2+p^2}\sin t, 0)$$

由此可求得

$$\tau_1(t) = \frac{p}{r^2+p^2}$$

[4]下式其實還要用到向量「點積」的以下運算法則：$i \cdot k = j \cdot k = 0$ 和 $k \cdot k = 1$。另外，由於下式中的 $Z(t)$ 是平面曲線的參數化形式，在計算下式時，應設定 $Z(t) = (x(t), y(t), 0)$。

[5]以下計算要應用向量叉積的求導法則，即若 $U(t)$ 和 $V(t)$ 為向量值函數，則 $\frac{d}{dt}(U(t) \times V(t)) = U'(t) \times V(t) + U(t) \times V'(t)$，以及以下事實：由於 $T'(t)$ 與 $P(t)$ 互相平行，所以 $T'(t) \times P(t) = 0$。

上述結果顯示圓螺旋線的撓率是非零常數，這顯示圓螺旋線不是平面曲線。此外，當 $p = 0$ 時，(4) 退化成 x-y 平面上的 r 半徑圓，而上述結果也變成 $\tau_1(t) = 0$，這顯示圓形是平面曲線，因此其撓率恆為 0。

我們還可以從曲線的參數化形式推導出 $\tau(t)$ 的計算公式。設 $Z(t)$ 為某空間曲線的參數化形式，那麼可以證明該曲線的撓率可用以下公式計算 (在下式中, '、'' 和''' 分別代表「一階導數」、「二階導數」和「三階導數」)：

$$\tau(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot Z'''(t)}{\|Z'(t) \times Z''(t)\|^2} \qquad (11)$$

上式中的分子是一個「純量三重積」(scalar triple product)，根據向量代數的知識，可以借助行列式來計算純量三重積。設向量 u、v 和 w 可分別寫成 $u_1 i + u_2 j + u_3 k$、$v_1 i + v_2 j + v_3 k$ 和 $w_1 i + w_2 j + w_3 k$ 的形式，則

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

讀者可自行驗證，利用公式 (11) 計算圓螺旋線 Z_1 的撓率，可得到與前面相同的結果。

最後考慮 $P(t)$ 的一階導數,根據前面的叉積結果,我們有 $P(t) = B(t) \times T(t)$，對此求導，應用 (7) 和 (10)，並再次運用前面的叉積結果，可得

$$\begin{aligned} P'(t) &= B(t) \times T'(t) + B'(t) \times T(t) \\ &= B(t) \times \|Z'(t)\|\kappa(t)P(t) - \|Z'(t)\|\tau(t)P(t) \times T(t) \\ &= -\|Z'(t)\|\kappa(t)T(t) + \|Z'(t)\|\tau(t)B(t) \qquad (13) \end{aligned}$$

由此可見，利用 $P'(t)$，我們得不到 $\kappa(t)$ 和 $\tau(t)$ 以外的空間曲線的性質，但上式可用來驗算前面公式的計算結果。以前面討論過的圓螺旋線為例，運用前面的計算結果，一方面，我們有

$$P_1'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

另一方面，我們又有

$$\begin{aligned} & -\|Z_1'(t)\|\kappa_1(t)T_1(t) + \|Z_1'(t)\|\tau_1(t)B_1(t) \\ = \; & -(\sqrt{r^2+p^2})\left(\frac{r}{r^2+p^2}\right)\left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\right) \\ & +(\sqrt{r^2+p^2})\left(\frac{p}{r^2+p^2}\right)\left(\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\sin t, -\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\cos t, \frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}\right) \\ = \; & (\sin t, -\cos t, 0) \end{aligned}$$

由此驗證了前面的計算結果正確。

至此我們求得弗萊納-塞雷標架中三個成員的一階導數的公式 (7)、(10) 和 (13)，這三條公式合稱弗萊納-塞雷公式(Frenet-Serret formulas)。為易於記憶，一般會把這三條公式寫成以下矩陣形式 (為使下式較為簡潔，以下略去各個函數的論元)：

$$\begin{bmatrix} T' \\ P' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \|Z'\|\kappa & 0 \\ -\|Z'\|\kappa & 0 & \|Z'\|\tau \\ 0 & -\|Z'\|\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ P \\ B \end{bmatrix} \qquad (14)$$

請注意上式中間的矩陣是一個「反對稱矩陣」(skew-symmetric matrix)，即滿足 $M^T = -M$ 的矩陣 M，其中 M^T 代表 M 的「轉置」(transpose)(將 M 的行和列對調所得的矩陣)。

我們在《數學示例：曲線的參數化》中介紹了「單位速率」的參數化形式，並指出如用弧長 s 作為參數，便可得到這種參數化形式。如果某曲線的參數化形式具有單位速率的性質，那麼上述某些數式會得到簡化，其中公式 (1)、(6)、(7)、(10)、(13) 和 (14) 中的 $\|Z'(t)\|$ 全部消失 (即變成 1)。此外，可以證明曲率和撓率的計算公式 (8) 和 (11) 也簡化如下：

$$\kappa(s) = \|Z''(s)\| \qquad (15)$$

$$\tau(s) = \frac{(Z'(s) \times Z''(s)) \cdot Z'''(s)}{\|Z''(s)\|^2} \qquad (16)$$

舉例說，我們在《數學示例：曲線的參數化》中提供了以下圓螺旋線的單位速率參數化形式 (下式等於上述網頁 (19) 中的 Z_{10})：

$$\begin{aligned} Z_2 : \quad & (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3; \\ Z_2(s) = \quad & \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}}\right), \frac{ps}{\sqrt{r^2+p^2}} \right) \end{aligned} \qquad (17)$$

讀者可自行驗證，利用公式 (15) 和 (16) 求得的曲率和撓率跟前面求得的 $\kappa_1(t)$ 和 $\tau_1(t)$ 完全吻合。

我們在《數學示例：平面曲線的性質》的「定理 2」指出，某平面曲線是直線當且僅當其有向曲率恆為 0。對於空間曲線而言，我們在前面設定了對任何 t，$T'(t) \neq (0,0,0)$，由此根據 (6)，空間曲線的曲率永不等於 0。但空間曲線的撓率卻可以等於 0，而且撓率起著類似有向曲率的作用，這是以下定理的內容。

定理 1：設 $Z(t)$ 為某空間曲線的光滑正則且滿足 $T'(t) \neq (0,0,0)$ 的參數化形式，則 $Z(t)$ 的軌跡是一條平面曲線當且僅當對 $Z(t)$ 的定義域中所有 t，均有 $\tau(t) = 0$。

我們在《數學示例：曲線的參數化》中曾指出某些平面曲線可被看成某個分量恆為 0 的「退化」空間曲線，例如位於 x-y 平面上的 r 半徑圓便可表示成以下參數化形式 (下式等於該網頁 (14) 中的 Z_8)：

$$Z_3 : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^3; \;\; Z_3(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0\right) \qquad (18)$$

由於上式具有單位速率的性質，可以運用公式 (16) 計算其撓率，即計算

$$\tau_3(s) = \frac{(Z_3\text{'}(s) \times Z_3\text{''}(s)) \cdot Z_3\text{'''}(s)}{\|Z_3\text{''}(s)\|^2}$$

為計算上式的分子，可以使用 (12) 所示的行列式。但由於 $Z_3(s)$ 的 z 分量恆為 0，$Z_3\text{'}(s)$、$Z_3\text{''}(s)$ 和 $Z_3\text{'''}(s)$ 的 z 分量也必恆為 0。這麼一來，用以計算上式分子的行列式便有一列全為 0。根據線性代數的知識，這樣的行列式必等於 0。另一方面，根據 (15)，上式的分母等於 $\kappa_3(s)^2$，故必不等於 0。綜合以上分析，必有 $\tau_3(s) = 0$，由此驗證了 Z_3 的軌跡確是平面曲線。

惟請注意，某些平面曲線並非位於 x-y、x-z 或 y-z 平面上，這些平面曲線的參數化形式因而也並不表現為某個分量恆為 0 的形式。在此情況下，我們可以用「定理 1」判斷這些曲線是否平面曲線。接下來看一個較抽象的例子，考慮以下參數化形式：

$$Z_4 : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; \;\; Z_4(t) = (f(t), g(t), af(t) + bg(t)) \qquad (19)$$

其中 f 和 g 為任意一元實值函數，使得 $Z_4(t)$ 為光滑正則且滿足 $T_4\text{'}(t) \neq (0,0,0)$ 的參數化形式，而 a 和 b 則是實數。對於如此抽象的參數化形式，似乎難以判斷它是否平面曲線的軌跡，但其實可以看到此一曲線是位於 $ax + by - z = 0$ 平面上，因為上式的 x、y 和 z 分量滿足 $ax + by - z = 0$ 此一方程。

為驗證上述結論，可以用 (11) 計算 $\tau_4(t)$。首先計算純量三重積 $(Z_4\text{'}(t) \times Z_4\text{''}(t)) \cdot Z_4\text{'''}(t)$，根據 (12)，這等於計算以下行列式：

$$\begin{vmatrix} f\text{'}(t) & g\text{'}(t) & af\text{'}(t) + bg\text{'}(t) \\ f\text{''}(t) & g\text{''}(t) & af\text{''}(t) + bg\text{''}(t) \\ f\text{'''}(t) & g\text{'''}(t) & af\text{'''}(t) + bg\text{'''}(t) \end{vmatrix}$$

上述行列式的第三列是其餘兩列的線性組合，根據線性代數的知識，這樣的行列式必等於 0。另一方面，公式 (11) 的分母等於 (8) 的分子的平方。由

於 $Z_4(t)$ 的曲率永不等於 0，(8) 的分子永不等於 0，因而 (11) 的分母也不等於 0。綜合以上結果，可得 $\tau_4(t) = 0$。由此根據「定理 1」，可知 Z_4 確是平面曲線的軌跡。

連結至數學專題
連結至周家發網頁