數學示例：曲面的參數化

我們在《數學示例：曲線的參數化》中介紹了與曲線參數化形式相關的概念，本文主旨是把這些概念推廣應用於二維曲面上。曲面的參數化形式具有以下一般形式：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \qquad (1)$$

上式跟《數學示例：曲線的參數化》中的空間曲線一般參數化形式 (即該網頁的 (13)) 有一些不同之處：首先，上式是以 $\mathbb{R}^2$ 的子集 (常常表現為兩個區間的笛卡爾積或者一個圓盤) 作為定義域，而曲線則是以 $\mathbb{R}$ 的子集作為定義域；其次，上式包含兩個參數 u 和 v，而曲線則僅包含一個參數 t。上述差異顯示曲面是一種二維幾何圖形，跟作為一維幾何圖形的曲線是很不同的。

以下讓我們看兩個直觀例子 (在下式中，(a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) 都不等於 $(0, 0, 0)$，並且 $(b_1, b_2, b_3) \neq (ka_1, ka_2, ka_3)$，其中 $k \in \mathbb{R}$，此一規定保證上述三點不共線)：

$$X_1 : (-\infty, \infty)\times(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_1(u, v) = (a_1u+b_1v, a_2u+b_2v, a_3u+b_3v) \qquad (2)$$

$$X_2 : [0, 2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3;\ \ X_2(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v) \qquad (3)$$

X_1 是通過原點、(a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) 這三個不共線點的平面的參數化形式，當 $u = 0, v = 0$、$u = 1, v = 0$ 和 $u = 0, v = 1$ 時，$X_1(u, v)$ 分別等於 $(0, 0, 0)$、(a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3)。X_2 則是以原點為球心，半徑為 r 的球面 (以下稱為「r 半徑球面」) 的參數化形式，如把上式中的三個分量 $r \cos u \cos v$、$r \sin u \cos v$ 和 $r \sin v$ 分別當作 x、y 和 z，那麼 x、y 和 z 滿足 r 半徑球面的方程 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$。

如同曲線的情況，微分幾何對曲面的參數化形式也作出了一些限制。第一個限制是參數化形式必須是光滑的，用微積分語言來表述，就是上述 (1) 中的函數 X 的各個分量 x、y 和 z 都必須是無窮可微的，即它們都有任意階「偏導數」(partial derivative)，而且這些偏導數全都是連續的。請注意這裡跟一元函數的情況不同，對於一元函數，要判斷它是否無窮可微，只需看

它是否有任意階導數；但對於多元函數，要判斷它是否無窮可微，除了看它是否有任意階偏導數外，還要看這些偏導數是否連續。

第二個限制是參數化形式必須是正則的，用微積分語言來表述，就是 X 的兩個一階偏導數 $\frac{\partial X}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial X}{\partial v}$ 在定義域 E 內的各點處都是線性獨立的。根據線性代數的知識，這等於說 $\frac{\partial X}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial X}{\partial v}$ 的叉積在 E 內的各點處都不等於 $(0,0,0)$。如用行列式表達叉積 (請參閱《數學示例：空間曲線的性質》中的公式 (5))，這又等於說對 E 內任何點 (u,v)，均有 (請注意下式右端的 0 是 $0i+0j+0k$ 的簡寫，這個向量也可寫成 $(0,0,0)$ 的形式)：

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (4)$$

舉例說，前面 (2) 和 (3) 的參數化形式顯然都是光滑的。為考察 X_1 的正則性，我們進行以下計算：

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u}(u,v) &= (a_1,a_2,a_3)\\ \frac{\partial X_1}{\partial v}(u,v) &= (b_1,b_2,b_3)\end{aligned}$$

由於前面設定了 $(b_1,b_2,b_3)\neq(ka_1,ka_2,ka_3)$，根據線性代數的知識，$\frac{\partial X_1}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial X_1}{\partial v}$ 必是線性獨立的，由此可知 X_1 是正則的。為考察 X_2 的正則性，我們進行以下計算：

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_2}{\partial u}(u,v) &= (-r\sin u\cos v, r\cos u\cos v, 0)\\ \frac{\partial X_2}{\partial v}(u,v) &= (-r\cos u\sin v, -r\sin u\sin v, r\cos v)\end{aligned}$$

利用 (4)，可求得

$$\frac{\partial X_2}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial X_2}{\partial v}(u,v)=(r^2\cos u\cos^2 v, r^2\sin u\cos^2 v, r^2\sin v\cos v)$$

由於上式右端永不等於 $(0,0,0)$，由此可見 X_2 也是正則的。

此外，微分幾何對曲面的參數化形式還有其他限制，就是 (1) 中的定義域 E 須為開集，而且 X 須為一一函數。據此，前面的 X_2 並不符合此一限制條件，因為其定義域 $[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 不是開集，而且 X_2 在此定義域上不是一一函數，因為對任何 v 而言，都有 $X_2(0,v)=X_2(2\pi,v)$ 等等。如把 X_2 的定義域改為開集，即把 X_2 改為下式：

$$X_3:(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^3;\quad X_3(u,v)=(r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v) \qquad (5)$$

固然可以解決上述問題 (因為這個定義域是開集，而且 X_3 在此定義域上是一一函數)，但這麼一來，X_3 便不能覆蓋整個 r 半徑球面，例如在上述定義域下，穿過 $(0,0,r)$、$(r,0,0)$ 和 $(0,0,-r)$ 這三點的半大圓便不在 X_3 的值域之內。

為解決上述困難，可以再定義另外三個參數化形式如下：

$$X_4 : (-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\;\; X_4(u,v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v) \qquad (6)$$

$$X_5 : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3;\;\; X_5(u,v) = (r\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u\sin v) \qquad (7)$$

$$X_6 : (-\pi,\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3;\;\; X_6(u,v) = (r\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u\sin v) \qquad (8)$$

上述 X_3、X_4、X_5 和 X_6 稱為坐標卡(coordinate chart)，因為它們中的每一個都為 r 半徑球面的某個局部區域提供其在 $\mathbb{R}^3$ 中的 x、y 和 z 坐標，它們合起來便能夠覆蓋整個 r 半徑球面。

從以上討論可見，對於某些曲面 (例如 r 半徑球面) 來說，為了涵蓋整個曲面，往往需要使用一個以上的坐標卡。此外，由於這些坐標卡的覆蓋範圍互相重疊，還要規定這些重疊範圍須滿足某些條件，因此如要詳細介紹坐標卡的嚴格處理方法，還要引入更多概念。可是，在很多實際應用中，往往只需考慮曲面的局部情況，這時只要使用一個坐標卡便能應付基本的需要。為免使討論過於繁冗和引入過多技術細節，以下在討論曲面時，一般只提供一個可覆蓋當前討論範圍的坐標卡，並假設存在可覆蓋曲面其他範圍的坐標卡。基於以上討論，以下凡提到「坐標卡」，均假設其定義域 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的開子集,並且其數式是具有光滑性和正則性的一一函數。

接下來介紹一些特殊曲面類別並提供其坐標卡。第一類曲面的方程具有以下特點，它的某個分量可以表示成以其餘兩個分量作為論元的函數。設某曲面的 z 分量可以寫成 x 和 y 分量的函數，那麼我們有 $z = f(x,y)$，由此容易得到這個曲面的坐標卡如下：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\;\; X(u,v) = (u, v, f(u,v)) \qquad (9)$$

某些曲面的方程表面上可以寫成上述形式，但其實並不涵蓋整個曲面。舉例說，r 半徑球面的方程是 $x^2+y^2+z^2=r^2$，這裡似乎可以把 z 表示成 x 和 y 的函數：$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$，並由此得到以下坐標卡：

$$X_7 : \{(u,v) : u^2+v^2 < r^2)\} \to \mathbb{R}^3;\;\; X_7(u,v) = \left(u, v, \sqrt{r^2-u^2-v^2}\right)$$

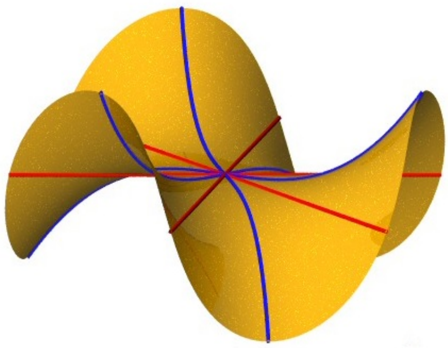
但上式的 z 分量只可能是非負實數，因此即使把上式的定義域改成閉圓盤 $\{(u,v) : u^2+v^2 \le r^2)\}$，上式仍只涵蓋「$r$ 半徑北半球面」，而非整個 r 半

徑球面，因此 r 半徑球面不屬於這類曲面。

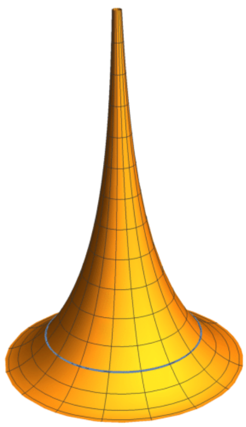
接下來讓我們看一個真正具有上述特性的曲面的例子－「猴鞍面」(monkey saddle)。這個曲面可以表示成 $z = x^3 - 3xy^2$ 的形式，由此根據 (9)，可得到猴鞍面的坐標卡如下：

$$X_8 : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3; \;\; X_8(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2) \tag{10}$$

以下是猴鞍面的圖象：



第二類曲面稱為旋轉曲面(surface of revolution)，是把一條平面曲線繞著某旋轉軸旋轉一周後所形成的曲面。上述曲線在旋轉的過程中除了產生旋轉曲面外，還會在曲面上產生兩類曲線。首先，該曲線上任一點在旋轉一周後會產生一個圓，這個圓稱為緯線(parallel)。其次，該曲線在轉過任意角度後都會產生一條與原來曲線有相同形狀大小的曲線，可視為原來曲線的「複製品」，這種曲線稱為經線(meridian)。



舉例說，上圖展示一個稱為「偽球面」(pseudosphere) 的旋轉曲面，該曲面

是由一條稱為「曳物線」(tractrix) 的平面曲線生成。上圖還顯示了偽球面上的緯線和經線，其中大小不一且互相平行的圓就是緯線；其餘具有相同形狀大小的曲線就是經線，每條經線都是原來曳物線的複製品。

設有關旋轉曲面是由一條在 x-z 平面上的曲線生成的，那麼該曲線應具有以下參數化形式：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\;\; Y(v) = (f(v), 0, g(v)) \qquad (11)$$

由於上式代表一條曲線，所以只有一個參數 v。另外，由於上述曲線是位於 x-z 平面上，所以上式的 y 分量是 0。從上式便可得到把上述曲線繞 z 軸旋轉一周後所得旋轉曲面的坐標卡：

$$X : (0, 2\pi) \times D \to \mathbb{R}^3;\;\; X(u, v) = (\cos u\, f(v), \sin u\, f(v), g(v)) \qquad (12)$$

上式的 x 分量和 y 分量帶有 $\cos u$ 和 $\sin u$ 的形式，這是圓形參數化形式的典型形式，反映旋轉曲面的緯線具有圓形的形狀。此外，上式帶有原來曲線的 $f(v)$ 和 $g(v)$ 形式, 反映旋轉曲面的經線具有與原來曲線相同的形狀。

舉例說，r 半徑球面便可以看成由 r 半徑半圓生成的旋轉曲面。x-z 平面上的 r 半徑半圓可以表示成以下參數化形式：

$$Y_9 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\;\; Y_9(v) = (r\cos v, 0, r\sin v) \qquad (13)$$

上式的定義域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的長度是 π (而非 2π)，這是因為球面是由半圓 (而非圓) 生成。根據 (11)、(12) 和上式，可得 r 半徑球面的坐標卡如下：

$$X_9 : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\;\; X_9(u, v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$$

上式跟前面 (5) 中的 X_3 完全相同。

前面說過，偽球面是由曳物線生成的旋轉曲面，以下是 x-z 平面上曳物線的參數化形式：

$$Y_{10} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3;\;\; Y_{10}(v) = (\operatorname{sech} v, 0, v - \tanh v) \qquad (14)$$

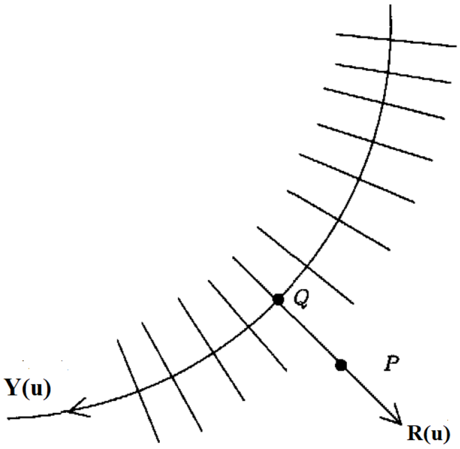
上式應用了兩個雙曲函數，這兩個函數可以定義如下：

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad\qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

根據 (11)、(12) 和上式，可得偽球面的坐標卡如下：

$$X_{10} : (0, 2\pi) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3;\;\; X_{10}(u, v) = (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v) \qquad (15)$$

第三類曲面稱為直紋曲面(ruled surface), 這類曲面可被看成一條 (有限或無限長的) 運動直線在三維空間中掃過的軌跡 (就正如曲線可被看成一個運動點走過的軌跡一樣)。在上述定義中，運動直線上某一定點所走過的軌跡稱為準線(directrix)，而運動直線在準線上每一點的複製品則稱為母線(ruling 或 generator)。以下是直紋曲面的示意圖：



上圖中的曲線就是準線，設該準線具有以下參數化形式：

$$Y: D_u \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ \ Y(u) = (f(u), g(u), h(u)) \qquad (16)$$

對應於定義域 D_u 中每個參數 u，$Y(u)$ 代表準線上某一點的位置 (向量)。上圖中的直線就是母線，設這些母線可以表示成以下向量值函數：

$$R: D_u \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ \ R(u) = (i(u), j(u), k(u)) \qquad (17)$$

對應於 D_u 中每個參數 u，$R(u)$ 代表穿過準線上 $Y(u)$ 那一點的母線的方向。由於穿過準線上不同點的母線可以各有不同的方向，所以 $R(u)$ 會隨著 u 而變化。請注意雖然 $Y(u)$ 和 $R(u)$ 都是隨著 u 而變化的向量，但兩者有很不同的意義。$Y(u)$ 代表準線上點的位置，所以此一向量是以整個空間的坐標原點作為起點；$R(u)$ 則代表穿過準線上某點的母線的方向，所以此一向量是以準線上的點 (而非坐標原點) 作為起點。

由於 $R(u)$ 只反映方向 (而非位置)，如要確定任一母線上某點的位置，便必須以一個純量乘以 $R(u)$，這樣便可以把直紋曲面上每一點的位置 (向量) 表示成下式：

$$Y(u) + vR(u) \qquad (18)$$

以上圖中的 P 點為例，該點是位於穿過 Q 點的母線上。假設 Q 點在準線上對應著 $Y(0.5)$ 這一點，那麼 $R(0.5)$ 便代表 QP 直線的方向。假設 P 與 Q 的距離等於 $R(0.5)$ 這個向量的模的 3 倍，那麼 P 的位置 (向量) 便可表

示成 $Y(0.5)+3R(0.5)$。綜合以上 (16) － (18)，便可寫出直紋曲面的坐標卡如下 (在下式中，D_u 是準線 Y 的定義域，D_v 則反映母線的長度)：

$$X : D_u \times D_v \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ \ X(u,v) = (f(u)+vi(u), g(u)+vj(u), h(u)+vk(u)) \qquad (19)$$

舉例說，平面便是一種直紋曲面。設有通過原點和 (a_1, a_2, a_3) 這兩點的直線，其參數化形式為

$$Y_{11} : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ Y_{11}(u) = (a_1u, a_2u, a_3u) \qquad (20)$$

現以上述直線為準線，並設在這條準線的每一點上的母線均具有相同方向 (但異於上式所代表直線的方向)，因此這些母線可以表示成以下常值向量函數：

$$R_{11} : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ R_{11}(u) = (b_1, b_2, b_3) \qquad (21)$$

請注意穿過原點的那條母線就是通過原點和 (b_1, b_2, b_3) 這兩點的直線。此外，由於上述準線和母線朝向不同的方向，所以這裡必有 $(b_1, b_2, b_3) \neq (ka_1, ka_2, ka_3)$。由此可知此一直紋曲面是通過原點、$(a_1, a_2, a_3)$ 和 (b_1, b_2, b_3) 這三個不共線點的平面，根據 (19)，此一直紋曲面的坐標卡是

$$X_{11} : (-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_{11}(u,v) = (a_1u+b_1v, a_2u+b_2v, a_3u+b_3v)$$

上式跟前面 (2) 中的 X_1 完全相同。

圓柱面 (指空心圓柱體的二維曲面，不包括圓柱體頂部和底部的圓盤) 也是一種直紋曲面，因為圓柱面可被看成下圖所示的曲面：

我們可以把上圖曲面的準線 (即圓柱面底部的圓) 設定為 x-y 平面上的 r 半徑圓，並把其參數化形式寫成

$$Y_{12} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ Y_{12}(u) = (r\cos u, r\sin u, 0) \qquad (22)$$

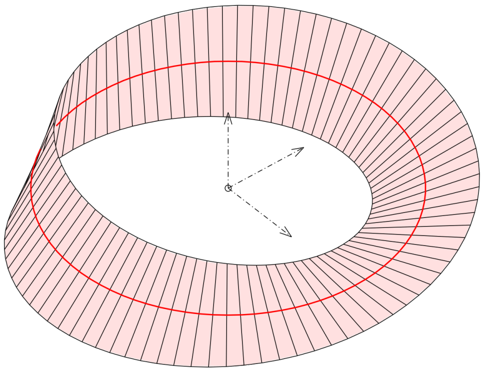
在上述設定下，上圖曲面的母線就是與 z 軸平行的直線，因此這些母線可以表示成以下常值向量函數：

$$R_{12} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ R_{12}(u) = (0, 0, 1) \qquad (23)$$

設上圖母線的長度 (即圓柱面的高) 為 h，那麼可以設定 (19) 中的 D_v 為 $(0, h)$，由此可得圓柱面的坐標卡如下：

$$X_{12} : (0, 2\pi) \times (0, h) \to \mathbb{R}^3; \quad X_{12}(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v) \tag{24}$$

最後考慮一種特殊曲面－「莫比烏斯帶」(Möbius strip)，我們在《數學示例：積拓樸與商拓樸》中曾指出，如把某正方面的某一邊扭轉，然後把它與對邊黏合起來，所得圖形就是莫比烏斯帶。下圖顯示莫比烏斯帶也是一種直紋曲面：



上圖中的紅線就是準線，可以把它設定為 x-y 平面上的 r 半徑圓，因此以下沿用前面的 Y_{12} 作為上圖準線的參數化形式。上圖的母線則是隨著準線而不斷改變方向的直線，當 u 趨向 0，它與 x 軸同向；當 $u = \pi$，它與 z 軸同向；當 u 趨向 2π，它與 x 軸反向。換句話說，在沿著準線繞過一周後，母線並沒有回復原來的方向，而是朝向相反的方向，這反映了製作莫比烏斯帶時我們要把正方面的某一邊扭轉。根據上述討論，莫比烏斯帶的母線可以表示成以下向量值函數：

$$R_{13} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad R_{13}(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2}\right) \tag{25}$$

讀者可自行驗證，上式的確反映上述母線的方向。設上圖母線的長度 (即莫比烏斯帶的寬度) 為 h，那麼可以設定 (19) 中的 D_v 為 $(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$，由此可得莫比烏斯帶的坐標卡如下：

$$\begin{aligned} X_{13} : \quad & (0, 2\pi) \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \to \mathbb{R}^3; \\ X_{13}(u, v) = \quad & \left(r\cos u + v\cos\frac{u}{2}\cos u, r\sin u + v\cos\frac{u}{2}\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁