數學示例：張量積與縮略

我們在《數學示例：張量與張量場》中介紹了「張量」的概念，並指出某一流形上的所有 (r, s) 張量構成向量空間，因此張量之間能進行向量空間中的運算，如加法和純量乘法。但除此以外，張量還有兩種重要運算－張量積和縮略。本文首先簡介加法和純量乘法，然後詳細介紹張量積和縮略，以及由這兩種運算結合而產生的內積運算。為免討論過於冗長，以下凡提到 (r, s) 張量空間，都是指 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$，其中 M 為 m 維流形，p 為其上一點 (儘管以下內容也適用於 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$,其中 V 是一般向量空間)。

如同一般向量空間上的對應運算，(r, s) 張量空間上的加法和純量乘法運算是建基於張量分量的運算。設 T 和 S 為 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的 (r, s) 張量，並且有以下形式：

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (1)$$

$$S = S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (2)$$

那麼 $T + S$ 和 kT (其中 k 是實數) 也是 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的 (r, s) 張量，並且具有以下形式：

$$T + S = (T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (3)$$

$$kT = kT^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (4)$$

舉例說，設有 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1}$ 中的以下 $(1, 1)$ 張量 (其中 p 是 $\mathbb{R}^2$ 上的某一點)：

$$T_I = -2 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 7 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (5)$$

$$T_{II} = 3 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - 5 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (6)$$

那麼容易求得

$$T_I + T_{II} = 3\,\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - 2\,\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 2\,\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2$$

$$5T_I = -10\,\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + 5\,\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 35\,\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2$$

上述加法運算只能在兩個同類型張量 (即有相同的 r 和相同的 s) 之間進行，接下來介紹一種可在不同類型的張量之間進行的運算。設 T 為如 (1) 所示的 (r,s) 張量，U 為 $T_pM^{\otimes t} \otimes T_p^*M^{\otimes u}$ 中的 (t,u) 張量，並且有以下形式：

$$U = U^{k_1 \ldots k_t}_{l_1 \ldots l_u}\,\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_t}} \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots \otimes dx^{l_u} \qquad (7)$$

那麼 T 與 U 的張量積(tensor product)，記作 $T \otimes U$，是 $T_pM^{\otimes r+t} \otimes T_p^*M^{\otimes s+u}$ 中的 $(r+t, s+u)$ 張量，並且具有以下形式：

$$\begin{aligned} T \otimes U \;&=\; T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, U^{k_1 \ldots k_t}_{l_1 \ldots l_u}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_t}} \\ &\quad \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots \otimes dx^{l_u} \qquad (8) \end{aligned}$$

我們在《數學示例：張量與張量場》中曾指出，張量除可被看成張量空間的成員外，也可被看成多重線性函數，以下是一個 (r,s) 張量對 r 個餘切向量和 s 個切向量的函數作用 (下式大致等於上述網頁的 (15))：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(\alpha_1) \times \ldots \times \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}(\alpha_r) \times dx^{j_1}(v_1) \times \ldots \times dx^{j_s}(v_s) \qquad (9) \end{aligned}$$

類似地，$T \otimes U$ 作為一個 $(r+t, s+u)$ 張量，也可被看成多重線性函數。設 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+t} \in T_p^*M$，$v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+u} \in T_pM$，則 $T \otimes U$ 對這 $r+t$ 個餘切向量和 $s+u$ 個切向量的函數作用如下：

$$\begin{aligned} & T \otimes U(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+t}, v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+u}) \\ = \; & T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s) \times U(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+t}, v_{s+1}, \ldots, v_{s+u}) \qquad (10) \end{aligned}$$

請注意 (9) 可被看成 (10) 的特例，即 (9) 中的 (r,s) 張量可被看成 r 個 $(1,0)$ 張量 $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}$、...、$\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$ 以及 s 個 $(0,1)$ 張量 dx^{j_1}、...、dx^{j_s} 的張量積，這就是我們使用同一個符號 $\otimes$ 來代表張量積以及基底張量之間的連接符號的原因。

舉例說，考慮前面算得的 $(1,1)$ 張量 T_I+T_{II} 以及 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1}\otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0}$ 中的以下 $(1,0)$ 張量 (即向量)：

$$v_{III}=-6\,\frac{\partial}{\partial x^1}+4\,\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (11)$$

根據前面的討論，$(T_I+T_{II})\otimes v_{III}$ 是一個 $(2,1)$ $(=(1+1,1+0))$ 張量，根據 (8) 可求得 $(T_I+T_{II})\otimes v_{III}$ 如下：

$$\begin{aligned}
& (T_I+T_{II})\otimes v_{III} \\
= \quad & -18\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1+12\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1+12\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2 \\
& -8\,\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2-6\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1+4\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1 \\
& -12\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2+8\,\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2 \qquad (12)
\end{aligned}$$

為驗證以上計算結果，我們把上式作用於 2 個餘向量和 1 個向量如下：

$$\begin{aligned}
& (T_I+T_{II})\otimes v_{III}([1,2],[3,4],[5,6]^T) \\
= \quad & -18(1)(3)(5)+12(1)(4)(5)+12(1)(3)(6)-8(1)(4)(6) \\
& -6(2)(3)(5)+4(2)(4)(5)-12(2)(3)(6)+8(2)(4)(6) \\
= \quad & -74
\end{aligned}$$

根據 (10)，上述結果應等於

$$\begin{aligned}
& (T_I+T_{II})([1,2],[5,6]^T)\times v_{III}([3,4]) \\
= \quad & (3(1)(5)-2(1)(6)+(2)(5)+2(2)(6))\times(-6(3)+4(4)) \\
= \quad & -74
\end{aligned}$$

上述計算結果乃得驗證。

張量積作為張量之間的一種乘積，具有一般純量乘積的某些性質，這是以下定理的內容。

定理 1：設 $T,T_1,T_2\in T_pM^{\otimes r}\otimes T_p^*M^{\otimes s}$，$U,U_1,U_2\in T_pM^{\otimes t}\otimes T_p^*M^{\otimes u}$，$V\in T_pM^{\otimes v}\otimes T_p^*M^{\otimes w}$，$k\in\mathbb{R}$，則

(i) $(T_1+T_2)\otimes U=T_1\otimes U+T_2\otimes U$

(ii) $T\otimes(U_1+U_2)=T\otimes U_1+T\otimes U_2$

(iii) $kT\otimes U=k(T\otimes U)$

(iv) $T \otimes kU = k(T \otimes U)$

(v) $(T \otimes U) \otimes V = T \otimes (U \otimes V)$

(vi) $T \otimes 1 = 1 \otimes T = T$

上述定理的內容可以概括為：張量積具有雙重線性性質、結合性，並以 $(0,0)$ 張量 (即純量) 1 作為乘法單位元。可是，張量積卻沒有交換性，即對於一般的張量 T 和 U 而言，$T \otimes U \neq U \otimes T$。為驗證這一點，我們根據 (8) 求 $v_{III} \otimes (T_I + T_{II})$ 如下：

$$\begin{aligned}
& v_{III} \otimes (T_I + T_{II}) \\
= \quad & -18 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + 12 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 - 6 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 \\
& -12 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 + 12 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - 8 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
& +4 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 8 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (13)
\end{aligned}$$

把上述結果與 (12) 比較，可以看到 $(T_I + T_{II}) \otimes v_{III} \neq v_{III} \otimes (T_I + T_{II})$。

上述加法、純量乘法和張量積運算都是兩個張量 (純量可被看成 $(0,0)$ 張量) 之間的二元運算，接下來介紹一種作用於一個張量的一元運算。設 T 為如 (1) 所示的 (r,s) 張量，其中 $r \geq 1$ 和 $s \geq 1$，那麼 T 的縮略(contraction)，以下記作 $\mathrm{contr}(T)$[1]，是指把 T 的分量中的某個上標 i_a 和某個下標 j_b 設定為相同的虛擬指標 (設為 g)，並同時把 $\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}$ 和 dx^{j_b} 改為 1 [2]所得的結果。經縮略後，(1) 中的 (r,s) 張量 T 變成以下 $(r-1, s-1)$ 張量 (在下式中，$\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}}$ 和 $\widehat{dx^{j_b}}$ 代表略去這兩項)：

$$\begin{aligned}
\mathrm{contr}(T) \quad = \quad & T^{i_1 \ldots i_{a-1}\, g\, i_{a+1} \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{b-1}\, g\, j_{b+1} \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \\
& \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (14)
\end{aligned}$$

根據求和約定，上式包含兩重求和運算：第一重是 T 的分量內部就虛擬指標 g 進行的求和運算，第二重則是 T 的分量連同基底張量就其他虛擬指標 i_1、…、j_s 進行的求和運算。

[1]請注意如果張量 T 包含眾多上標和下標，那麼 $\mathrm{contr}(T)$ 可以代表多種不同結果，因而是一個意義不明確的符號。但由於張量分析沒有明確標示縮略運算的符號，這裡只能使用此一符號，讀者須透過上下文理解此符號代表就著哪一對上、下標進行縮略。

[2]根據「定理 1(vi)」，這樣做的結果是減少 T 的兩個基底張量組件。

以 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1}$ 中的 $(2,1)$ 張量為例，這類張量具有以下一般形式：

$$T = T^{i_1 i_2}_{j_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes dx^{j_1} \qquad (15)$$

現在如對上標 i_2 和下標 j_1 進行縮略，所得結果如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{contr}(T) &= T^{i_1\,g}_{g} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \\ &= (T^{i_1 1}_{1} + T^{i_1 2}_{2}) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \\ &= (T^{11}_{1} + T^{12}_{2}) \frac{\partial}{\partial x^{1}} + (T^{21}_{1} + T^{22}_{2}) \frac{\partial}{\partial x^{2}} \end{aligned} \qquad (16)$$

請注意上面的運算展示了兩重求和運算，第一重 (見第二行) 是就虛擬指標 g 的求和運算，第二重 (見第三行) 則是就虛擬指標 i_1 的求和運算。上述結果清楚顯示 $\mathrm{contr}(T)$ 是一個 $(1,0)$ $(= (2-1, 1-1))$ 張量。把上述結果應用於前面算得的 $(2,1)$ 張量 $(T_I + T_{II}) \otimes v_{III}$，可得到以下 $(1,0)$ 張量：

$$\mathrm{contr}((T_I + T_{II}) \otimes v_{III}) = -26 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (17)$$

接下來介紹另一種二元運算－內積運算。設 T 和 U 分別為如 (1) 和 (7) 所示的 (r,s) 張量和 (t,u) 張量，則 T 與 U 的內積(inner product)，記作 $T \cdot U$ [3]，是 T 與 U 的張量積的縮略，即

$$T \cdot U = \mathrm{contr}(T \otimes U) \qquad (18)$$

根據前面有關張量積和縮略的討論，可知 $T \cdot U$ 是一個 $(r+t-1, s+u-1)$ 張量。此外，內積也繼承了「定理 1」中張量積的性質。這即是說，把「定理 1(i) － (vi)」中的張量積符號 $\otimes$ 改為內積符號 $\cdot$，該定理仍然成立。由此可見本文介紹的「內積」雖然跟《數學示例：內積空間》介紹的「內積」有相同的名稱，但兩者是不相同的概念，因為本文介紹的內積並不具有交換性，而上述網頁介紹的內積若以 $\mathbb{R}$ 作為其純量集合卻具有交換性。

以 $(1,1)$ 張量 $T_I + T_{II}$ 和 $(1,0)$ 張量 v_{III} 為例，我們在前面先後計算了這兩個張量的張量積 (見 (12)) 以及這個張量積的縮略 (見 (17))，由此根據 (18)，可知

$$(T_I + T_{II}) \cdot v_{III} = -26 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (19)$$

從上式可見，$(T_I + T_{II}) \cdot v_{III}$ 是一個 $(1,0)$ $(= (1+1-1, 1+0-1))$ 張量。如前所述，張量的內積不具有交換性，即對於一般的張量 T 和 U 而言，

[3]由於內積的定義建基於縮略運算，$T \cdot U$ 也可以代表多種不同結果，因而也是一個意義不明確的符號，讀者須透過上下文理解此符號代表基於哪一個縮略運算而進行內積運算。

$T\cdot U \neq U\cdot T$。為驗證這一點，我們把 (16) 應用於前面算得的 $v_{III}\otimes(T_I+T_{II})$ (見 (13))，由此根據 (18)，便可得到：

$$v_{III}\cdot(T_I+T_{II}) \;=\; -30\,\frac{\partial}{\partial x^1}+20\,\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (20)$$

把上述結果與 (19) 比較，可以看到 $(T_I+T_{II})\cdot v_{III} \neq v_{III}\cdot(T_I+T_{II})$。

在以上對內積 $T\cdot U$ 的計算中，我們是先計算張量積 $T\otimes U$，然後運用縮略運算求 $\mathrm{contr}(T\otimes U)$。但我們也可以運用 (18)、(8) 和 (14) 寫出 $T\cdot U$ 的公式如下 (這裡假設是就 T 的上標 i_a 和 U 的下標 l_b 求 T 與 U 的內積)：

$$\begin{aligned}
& T\cdot U \\
= \;& \mathrm{contr}(T\otimes U) \\
= \;& \mathrm{contr}(T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\,U^{k_1\ldots k_t}_{l_1\ldots l_u}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_t}} \\
& \otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^{l_1}\otimes\ldots\otimes dx^{l_u}) \\
= \;& T^{i_1\ldots i_{a-1}\,g\,i_{a+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\;U^{k_1\ldots k_t}_{l_1\ldots l_{b-1}\,g\,l_{b+1}\ldots l_u} \\
& \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_t}} \\
& \otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^{l_1}\otimes\ldots\otimes\widehat{dx^{l_b}}\otimes\ldots\otimes dx^{l_u} \qquad (21)
\end{aligned}$$

以下讓我們用上式計算一般 $(1,0)$ 張量 (即向量) 與 $(0,1)$ 張量 (即餘向量) 的內積。$T_p\mathbb{R}^2$ 中的向量具有以下一般形式：

$$v = v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} = v^1\,\frac{\partial}{\partial x^1}+v^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$T_p^*\mathbb{R}^2$ 中的餘向量則具有以下一般形式：

$$\alpha = \alpha_j\,dx^j = \alpha_1\,dx^1+\alpha_2\,dx^2$$

根據 (21)，可直接求得 v 與 α 的內積 (而非先求它們的張量積然後進行縮略) 如下[4]：

$$\begin{aligned}
v\cdot\alpha=\alpha\cdot v \;&=\; v^g\alpha_g\,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\otimes\widehat{dx^j} \\
&=\; v^1\alpha_1+v^2\alpha_2 \qquad (22)
\end{aligned}$$

[4]對於一般張量 T 和 U 而言，T 與 U 的張量積和內積都沒有交換性。但對於向量 v 和餘向量 α 而言，由於 v 的基底向量只有 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\alpha$ 的基底餘向量則只有 dx^j，而根據 (8)，在計算張量積時我們總是把 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 置於 dx^j 之前，因此必有 $v\otimes\alpha=\alpha\otimes v$，因而也必有 $v\cdot\alpha=\alpha\cdot v$。

請注意上述結果跟向量代數中的「點積」很相似。根據向量代數，若 $v = [v_1, v_2]^T$ 和 $w = [w_1, w_2]^T$ 是向量，那麼它們的點積是

$$v \cdot w = w \cdot v = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

由此可見，張量的「內積」在某程度上的確可看作向量「點積」(亦稱「內積」) 的推廣。惟請注意，張量的內積不能在兩個向量之間進行，而且一般不具備交換性。

以上討論的是張量之間的張量積和內積。根據《數學示例：張量與張量場》，(r, s) 張量場是把流形 M 上的點映射為 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的 (r, s) 張量的函數，因此我們可以借助此一函數作用來定義張量場之間的張量積和內積。具體地說，設 T 為 (r, s) 張量場，U 為 (t, u) 張量場，則 $T \otimes U$ 是一個 $(r + t, s + u)$ 張量場，即一個以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出 $(r + t, s + u)$ 張量的函數；而 $T \cdot U$ 則是一個 $(r + t - 1, s + u - 1)$ 張量場，即一個以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出 $(r + t - 1, s + u - 1)$ 張量的函數。以上兩個函數滿足

$$(T \otimes U)(x) = T(x) \otimes U(x) \qquad (23)$$

$$(T \cdot U)(x) = T(x) \cdot U(x) \qquad (24)$$

由於 $T(x)$ 和 $U(x)$ 分別是 (r, s) 張量和 (t, u) 張量，可知 (23) 右端的 $T(x) \otimes U(x)$ 是 $(r + t, s + u)$ 張量；而 (24) 右端的 $T(x) \cdot U(x)$ 則是 $(r + t - 1, s + u - 1)$ 張量，因此如上定義的張量積和內積符合我們的要求。此外還可證明, 上述張量積和內積滿足前面介紹的各個計算方法和定理。

舉例說，考慮 $\Gamma(T(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1} \otimes T^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1})$ 中的以下 $(1, 1)$ 張量場：

$$\begin{aligned} T_{IV}(x^1, x^2) &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + (x^1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\ &\quad + (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + (x^2 - x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (25) \end{aligned}$$

和 $\Gamma(T(\mathbb{R}^2)^{\otimes 1} \otimes T^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0})$ 中的以下 $(1, 0)$ 張量場 (即向量場)：

$$v_V(x^1, x^2) = -2x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + (x^1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (26)$$

應用 (23) 和 (8)，可求得 $T_{IV} \otimes v_V$ 如下：

$$\begin{aligned} & (T_{IV} \otimes v_V)(x^1, x^2) \\ = \;& T_{IV}(x^1, x^2) \otimes v_V(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -2(x^2)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + x^2(x^1+x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 \\
& -2x^2(x^1-x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + ((x^1)^2-(x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \\
& -2(x^1)^2 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + (x^1)^2(x^1+x^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 \\
& -2x^2(x^2-x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + ((x^2)^2-(x^1)^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

接下來運用 (24) 和 (21) 求 T_{IV} 與 v_V 的內積 (請注意在以下運算的第三行中，我們先把 T_{IV} 和 v_V 寫成一般形式，其中 $T^i_j(x^1,x^2)$ 和 $v^k(x^1,x^2)$ 分別是 T_{IV} 和 v_V 的分量，這些分量本身也是函數，所以帶有論元 (x^1,x^2))：

$$
\begin{aligned}
& (T_{IV} \cdot v_V)(x^1,x^2) \\
= \quad & T_{IV}(x^1,x^2) \cdot v_V(x^1,x^2) \\
= \quad & \left(T^i_j(x^1,x^2) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right) \cdot \left(v^k(x^1,x^2) \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
= \quad & T^i_g(x^1,x^2)\, v^g(x^1,x^2) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^k}} \otimes \widehat{dx^j} \\
= \quad & (T^1_1(x^1,x^2)\, v^1(x^1,x^2) + T^1_2(x^1,x^2)\, v^2(x^1,x^2)) \frac{\partial}{\partial x^1} \\
& +(T^2_1(x^1,x^2)\, v^1(x^1,x^2) + T^2_2(x^1,x^2)\, v^2(x^1,x^2)) \frac{\partial}{\partial x^2} \\
= \quad & ((x^1)^2 - 3(x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + (-2(x^1)^2x^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

現在如把 $(1,3)$ 代入以上張量積和內積中的 (x_1,x_2)，可得

$$
\begin{aligned}
& (T_{IV} \otimes v_V)(1,3) \\
= \quad & -18 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + 12 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 12 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
& -8 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 - 6 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + 4 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 \\
& -12 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + 8 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2
\end{aligned}
$$

$$
(T_{IV} \cdot v_V)(1,3) = -26 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial}{\partial x^2}
$$

另一方面，如把 $(1,3)$ 分別代入 T_{IV} 和 v_V 中的 (x_1,x_2)，可得

$$
T_{IV}(1,3) = 3 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - 2 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2
$$

$$v_V(1,3) = -6\,\frac{\partial}{\partial x^1} + 4\,\frac{\partial}{\partial x^2}$$

以上兩個結果分別等於前面討論過的 $T_I + T_{II}$ 和 v_{III}，因此根據 (23)，$(T_{IV}\otimes v_V)(1,3)$ 應等於 $(T_I+T_{II})\otimes v_{III}$，而根據 (24)，$(T_{IV}\cdot v_V)(1,3)$ 應等於 $(T_I+T_{II})\cdot v_{III}$，但我們在前面已算得 $(T_I+T_{II})\otimes v_{III}$ 和 $(T_I+T_{II})\cdot v_{III}$，有關結果正與上述結果一致。

連結至數學專題
連結至周家發網頁