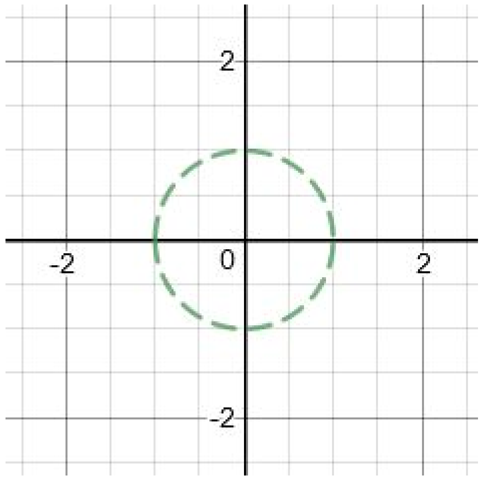
數學示例：拓樸空間

「拓樸空間」是「拓樸學」的基本概念，它可以看成對數學分析中「開集」概念的抽象。在介紹拓樸空間之前，我們先介紹開集的概念。開集的最典型例子是實數線 $\mathbb{R}$ 上的「開區間」(open interval)，如下圖所示：

在上圖中，紅色部分 (不包括其邊界點 2 和 5) 代表一個開區間，這個開區間一般可表示成 $(2, 5)$ 的形式，其中圓括號表示這個集合不包括邊界上的兩點 2 和 5。此外，上述開區間也可表示成以下形式：

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - 3.5| < 1.5\} \qquad (1)$$

上式代表所有與 3.5 相距少於 1.5 的實數組成的集合。開區間是一維實數空間上的概念，把此一概念推廣到二維或更高維實數空間上，便得到開球(open ball) 的概念，例如下圖便展示二維實數平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一個開球 (包括綠色虛線圍著的範圍，但不包括綠色虛線)：



上述開球可以表示成以下形式：

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} \qquad (2)$$

上式代表所有與點 $(0,0)$ 相距少於 1 的實數有序對組成的集合[1]。請注意 (1) 和 (2) 在形式上很相似，它們的分別只在於 x 的維度 (一維或二維)，因此我們可以把開區間看成開球的一個次類，以下是 n 維實數空間 $\mathbb{R}^n$ 上開球的一般定義：設 $c \in \mathbb{R}^n$，r 為正實數，則

$$B(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c| < r\} \qquad (3)$$

上式代表所有與 c 相距少於 r 的實數有序 n 元組組成的集合，也可稱為「以 c 為中心半徑為 r 的開球」。

可是，$\mathbb{R}^n$ 上的開集並不全都是開球。舉例說，$(0,1) \cup (2,5)$ 是由兩個開球組成的并集，直觀地看，這個并集也是一個開集，因為它不包含其邊界點 0、1、2 和 5，但這個開集不能表示成一個開球。因此開集是比開球更一般的概念，以下是開集(open set) 的定義：設 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的某個子集，如果對 U 的任何元素 x，都可找到一個包括 x 的開球 $B(x,r)$，使得 $B(x,r) \subseteq U$，則 U 是開集。

以 $(0,1) \cup (2,5)$ 為例，可以看到對於這個集合內的任何一點 x，都可找到一個滿足上述特點的開球。例如如果 $x = 2.0001$，那麼只要取開球 $B(2.0001, 0.00009) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2.0001| < 0.00009\}$，便必有 $2.0001 \in B(2.0001, 0.00009)$ 並且 $B(2.0001, 0.00009) \subseteq (0,1) \cup (2,5)$。

接著讓我們看一個不符合上述開集定義的例子，考慮 $\mathbb{R}$ 上的單元集 (即只包含一個元素的集合) $\{0\}$，並考慮這個集合的唯一元素 0。容易看到在 $\mathbb{R}$ 上任何以 0 為中心的開球 $B(0,r)$ 都必然包括 0 以外的實數，即 $B(0,r) \not\subseteq \{0\}$，由此可知 $\{0\}$ 不是開集。

上述概念可以推廣到一般距離空間。我們在《數學示例：距離空間》中介紹了「距離空間」的概念，這是指一個集合 X 連同其上的距離函數 d 所形成的數學結構，而 d 須滿足一系列公理，其中一條下文要用到的公理是「三角不等式」公理：設 $x, y, z \in X$，則

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad (4)$$

由於 d 實質上是對 $\mathbb{R}^n$ 中距離概念的抽象，我們可以把前面 $\mathbb{R}^n$ 中開球的概念推廣到一般距離空間 (X,d) 中。設 $c \in X$，r 為正實數，則

$$B_d(c,r) = \{x \in X : d(x,c) < r\} \qquad (5)$$

[1]在這裡我們看到圓括號既用來表示「有序對」(即 $\mathbb{R}^2$ 上的點)，又用來表示「開區間」，但根據上下文，應不致引起混淆。

比較 (3) 和 (5)，可以看到兩者的最重要差別在於上式使用一般的距離函數 d (而非 $\mathbb{R}^n$ 中用來表示兩點之間距離的 $|\ |$) 來代表 X 中兩個元素之間的距離，因此我們可以把上面定義的 $B_d(c,r)$ 也稱為開球。不僅如此，我們還可以把上面的開集定義推廣到一般距離空間如下：設 U 是 X 的某個子集，如果對 U 的任何元素 x，都可找到一個包括 x 的開球 $B_d(x,r)$，使得 $B_d(x,r) \subseteq U$，則 U 是開集。

舉例說，設 $X_1 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$，並定義距離函數如下：

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & 若 x = y \\ 1 & 若 x \neq y \end{cases}$$

那麼 (X_1, d_1) 構成一個距離空間，稱為「離散距離空間」(我們在《數學示例：賦範空間》中會討論這類空間)。跟 $\mathbb{R}$ 不同，在這個空間中，任何單元集都是開集。以 $\{\spadesuit\}$ 為例，由於 $B_{d_1}(\spadesuit, 1) = \{\spadesuit\}$ (這是因為在 X_1 的兩個元素中，只有 $\spadesuit$ 與 $\spadesuit$ 相距小於 1)，我們找到一個包括 $\spadesuit$ 的開球 $B_{d_1}(\spadesuit, 1)$，使得 $B_{d_1}(\spadesuit, 1) \subseteq \{\spadesuit\}$，由此可知 $\{\spadesuit\}$ 是開集。

以上我們把開集的定義從 $\mathbb{R}^n$ 推廣到一般距離空間。可是，上述定義仍包含一個涉及數值計量的距離函數。由於拓樸學的概念應不涉及數值計量[2]，為使開集成為拓樸學概念，必須對上面引入的開集定義作進一步的抽象化。為此，我們首先注意到前述一般距離空間 (X,d) 上的開集具有以下兩個性質：任意多個 (包括不可數無窮多個) 開集的并集都是開集，並且有限多個開集的交集是開集。

為證明上述第一個性質，設有 X 中的一系列開集 U_i $(i \in I)$，其中 I 是這些開集的「指標集」(index set)[3]。現考慮這些開集的并集 $\bigcup_{i\in I} U_i$ 及其任意元素 x。由於 $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$，根據并集的定義，必有某個 U_i 使得 $x \in U_i$。由於 U_i 是開集，根據開集的定義，必有某個包括 x 的開球 $B_d(x,r_i)$，使得 $B_d(x,r_i) \subseteq U_i$。但由於 $U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$，故必有 $B_d(x,r_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$。至此我們找到了一個包括 x 的開球 $B_d(x,r_i)$，使得 $B_d(x,r_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$，由此可知 $\bigcup_{i\in I} U_i$ 是開集。

為證明上述第二個性質，設有 X 中 n 個開集 U_1、...、U_n。現考慮這些開集的交集 $\bigcap_{i=1}^n U_i$ 及其任意元素 x。由於 $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$，根據交集的定義，對每個 $1 \leq i \leq n$，都有 $x \in U_i$。由於 U_i 是開集，根據開集的定義，對

[2]舉例說，距離、角度等就是涉及數值計量的概念，所以不是拓樸概念。因此雖然有些人把拓樸學看作幾何學的分支，但拓樸學研究的對象其實跟一般幾何學的研究對象有很大差異。

[3]「指標集」的作用是為一系列集合提供下標。舉例說，如果 $I = \{1,2,3\}$，那麼 U_i $(i \in I)$ 便代表 U_1、U_2、U_3 這三個集合。請注意如果 I 是不可數無窮集合，那麼 U_i $(i \in I)$ 便代表不可數無窮多個集合。

每個 $1 \leq i \leq n$，都有某個包括 x 的開球 $B_d(x, r_i)$，使得 $B_d(x, r_i) \subseteq U_i$。接著求 $r = \min_{i=1}^n r_i$。由於 r_1、...、r_n 全都是正實數，對這有限多個正實數求最小值必能得到一個正實數 r，而且對每個 $1 \leq i \leq n$，顯然都有 $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r_i)$。由此必有 $B_d(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$。至此我們找到了一個包括 x 的開球 $B_d(x, r)$，使得 $B_d(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$，由此可知 $\bigcap_{i=1}^n U_i$ 是開集。

請注意無窮多個開集的交集不一定是開集，現用一個反例說明這一點。考慮 $\mathbb{R}$ 中的開集 $U_1 = (-1, 1)$、$U_2 = (-1, \frac{1}{2})$、...、$U_i = (-1, \frac{1}{i})$、...，並求 $\bigcap_{i=1}^\infty U_i$。一方面，由於對任何 $1 \leq i < \infty$，都有 $0 \in U_i$，故有 $0 \in \bigcap_{i=1}^\infty U_i$。另一方面，對於任何大於 0 的實數 x，都必有某個正整數 i，使得 $x > \frac{1}{i}$，因此 $x \notin U_i$，故有 $x \notin \bigcap_{i=1}^\infty U_i$。綜合以上兩點，我們有

$$\bigcap_{i=1}^\infty U_i = (-1, 0]$$

上述集合顯然不是開集，因為這個集合有一個元素 0 不滿足開集的定義：對於任何包括 0 的開球 $B(0, r)$，都有 $B(0, r) \not\subseteq (-1, 0]$。

除了上述兩個性質外，根據開集的定義，還可以證明在距離空間 (X, d) 中，$\emptyset$ 和 X 也是開集。就 $\emptyset$ 而言，由於 $\emptyset$ 不包括任何元素，因此上述開集定義自然成立，所以 $\emptyset$ 是開集。就 X 而言，由於任何包括 x 的開球 $B_d(x, r)$（不管這個開球取甚麼正實數 r 作為半徑）都必然滿足上述開集定義中的條件 $B_d(x, r) \subseteq X$，所以 X 是開集。

拓樸學中拓樸空間(topological space) 的定義是對上面性質的抽象：拓樸空間是指一個集合 X，連同 X 的某些子集 (稱為「開集」) 組成的集合 $\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$ 須滿足以下公理：

(i) $X \in \mathcal{T}$

(ii) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(iii) 設 U_i $(i \in I)$ 為 $\mathcal{T}$ 的成員，則 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

(iv) 設 n 為正整數，並且 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$，則 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

在上述定義中，$\mathcal{T}$ 是由 X 中開集組成的集合，這個集合又稱為拓樸(topology)[4]。由於拓樸空間的定義包含一個集合 X 和拓樸 $\mathcal{T}$，嚴格地說，拓樸空間應表示成有序對 $(X, \mathcal{T})$ 的形式，但若在某些特殊情況下或根據上下文，拓樸 $\mathcal{T}$ 不言而喻，那麼也可把 $\mathcal{T}$ 省略，即僅用集合符號 X 代表拓樸空

[4]本文使用 script 字體代表「集合的集合」，由於「拓樸」是「集合的集合」，所以這裡使用 script 字體 $\mathcal{T}$。

間。請注意根據上述定義，就某個拓樸空間 $(X,\mathcal{T})$ 而言，開集就是指 $\mathcal{T}$ 的成員，此一定義並不涉及任何數值計量，因而符合拓樸學對拓樸概念的要求。

接下來讓我們看兩個「極端」拓樸空間的例子。第一個例子是離散拓樸空間(discrete topological space)，在這種空間中，$\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$，其中 $\mathcal{P}(X)$ 代表 X 的「冪集」(power set)。換句話說，在這種拓樸空間中，X 的任何子集都是開集。容易看到，由於 X 的任何子集都屬於 $\mathcal{T}$，所以上述有關拓樸空間的四條公理必然成立。舉例說，如沿用前面的 $X_1=\{\spadesuit,\heartsuit\}$，並規定 $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,\{\spadesuit\},\{\heartsuit\},\{\spadesuit,\heartsuit\}\}$，那麼 $(X_1,\mathcal{T}_1)$ 構成離散拓樸空間，請注意這個拓樸空間等同於前面討論過的「離散距離空間」(T_1,d_1)。

第二個例子是密著拓樸空間(indiscrete topological space)，在這種空間中，$\mathcal{T}=\{\emptyset,X\}$。換句話說，這種拓樸空間僅包含最起碼的開集。讀者可自行驗證，根據此一定義，不僅上述公理 (i) 和 (ii) 自然成立，其餘兩條公理也同樣成立。舉例說，如沿用 $X_1=\{\spadesuit,\heartsuit\}$，並規定 $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,\{\spadesuit,\heartsuit\}\}$，那麼 $(X_1,\mathcal{T}_2)$ 構成密著拓樸空間。

在以上兩例中，我們都容易列出 $\mathcal{T}$ 的成員。但在一般情況下，難以直接寫出 $\mathcal{T}$ 的所有成員，這時便要借助拓樸基(topological basis / base)[5]的概念間接地確定 $\mathcal{T}$。設 X 為集合，$\mathcal{B}$ 為 X 的某些子集組成的集合。若 $\mathcal{B}$ 滿足以下兩個條件，則 $\mathcal{B}$ 稱為 X 的拓樸基：

(i) 對 X 中每個 x，都有 $\mathcal{B}$ 的某個成員 B 使得 $x\in B$

(ii) 設 x 為 X 的任意元素，若 $x\in B_1\cap B_2$，其中 B_1 和 B_2 是 $\mathcal{B}$ 的成員，則有 $\mathcal{B}$ 的成員 B_3，使得 $x\in B_3$ 並且 $B_3\subseteq B_1\cap B_2$

舉例說，在 $\mathbb{R}^n$ 中，所有開球，即所有 $B(x,r)$ (其中 $x\in\mathbb{R}^n$，r 則是任意正實數)，構成一個拓樸基。這是因為 (i) $\mathbb{R}^n$ 中每個元素 x 顯然都是某個開球 (例如 $B(x,1)$) 的元素；以及 (ii) 若有 $x\in B_1\cap B_2$，其中 B_1 和 B_2 是開球，那麼由於 B_1 和 B_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的開集，根據前面的證明，我們知道 $B_1\cap B_2$ 也是開集，因此根據 $\mathbb{R}^n$ 中開集的定義，必有某個開球 B_3，使得 $x\in B_3$ 並且 $B_3\subseteq B_1\cap B_2$。

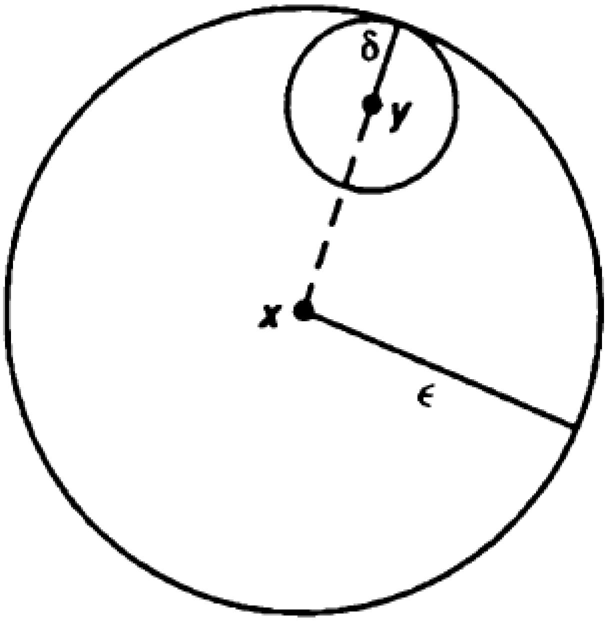
拓樸基滿足以下定理。

定理 1：設 X 為集合，$\mathcal{B}$ 為 X 的拓樸基，則 $\mathcal{B}$ 中任意多個成員的并集組成的集合構成 X 的一個拓樸，這個拓樸稱為「由拓樸基 $\mathcal{B}$ 生成的拓樸」。

[5]在數學上，「基」(或「基底」) 被用來指稱多個分支學科上的不同概念，例如線性代數中便有「基底」的概念。為了區分不同的「基」，這裡使用「拓樸基」以指稱拓樸學上的相關概念 (請注意有些人把線性代數上的相關概念稱為「哈默爾基底」Hamel basis)。

仍以 $\mathbb{R}^n$ 為例，我們在前面指出 $\mathbb{R}^n$ 中的所有開球構成一個拓樸基。根據上述定理，任意多個開球的并集組成的集合構成 $\mathbb{R}^n$ 的一個拓樸，這個拓樸稱為「由開球生成的拓樸」。如果把這個拓樸記作 $\mathcal{T}_3$, 那麼 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_3)$ 構成一個拓樸空間。在這個空間中，開集是指任意多個開球的并集，這裡「任意多個」可以指零個、一個、有限多個、無窮多個以至全部, 因此 $\emptyset$、$\mathbb{R}^n$、任何開球 $B(x, r)$ 以及任意多個開球的并集都是開集，這一點正是我們在前面證明過的 (這並不意外, 因為拓樸空間的概念正是從 $\mathbb{R}^n$ 中開集的概念抽象而來的)。

如前所述，距離空間中開集的定義是對 $\mathbb{R}^n$ 中開集定義的推廣，因此一個很自然的推論是，任意距離空間 (X, d) 中的全體開球 $B_d(x, r)$ (其中 $x \in X$，r 則是任意正實數)，跟 $\mathbb{R}^n$ 中的開球一樣，也構成一個拓樸基。為證明這一點，要證明前面拓樸基定義中的兩個條件均成立。條件 (i) 當然成立，這是因為對任何 $x \in X$，都有 $x \in B_d(x, r)$，其中 r 是任意正實數。為證明條件 (ii) 也成立，我們首先證明，對 X 中任何元素 x 以及任何正實數 ϵ，若有 $y \in B_d(x, \epsilon)$，那麼必能找到正實數 δ，使得 $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$，下圖可幫助讀者理解以下證明。



設 $\delta = \epsilon - d(y, x)$，由於 $y \in B_d(x, \epsilon)$，根據 (5)，必有 $d(y, x) < \epsilon$，因此上述 δ 必然是正實數。接著考慮 $B_d(y, \delta)$ 中的任意元素 z，根據 (5)，必有 $d(z, y) < \delta$，即 $d(z, y) < \epsilon - d(y, x)$。由此根據上述三角不等式 (4)，有

$$
\begin{aligned}
d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) \\
&< \epsilon - d(y, x) + d(y, x)
\end{aligned}
$$

$$= \quad \epsilon$$

由此根據 (5)，我們有 $z \in B_d(x, \epsilon)$。至此證明了 $B_d(y, \delta)$ 中的任意元素也是 $B_d(x, \epsilon)$ 的元素，故有 $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$。

接著證明 (X, d) 中的全體開球 $B_d(x, r)$ 滿足拓樸基定義中的條件 (ii)，故設 B_1 和 B_2 為 (X, d) 中的開球，並且 $y \in B_1 \cap B_2$，即 $y \in B_1$ 和 $y \in B_2$。根據剛才證明的事實，必有正實數 δ_1 和 δ_2，使得 $B_d(y, \delta_1) \subseteq B_1$ 和 $B_d(y, \delta_2) \subseteq B_2$。設 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，由此必有 $B_d(y, \delta) \subseteq B_1 \cap B_2$。至此我們找到一個開球 $B_d(y, \delta)$，使得 $y \in B_d(y, \delta)$ 並且 $B_d(y, \delta) \subseteq B_1 \cap B_2$，即上述條件 (ii) 成立。

在某些情況下，我們需要應用與拓樸基相關的另一個概念－拓樸子基 (topological subbasis / subbase)。設 X 為集合，$\mathcal{S}$ 為 X 的某些子集組成的集合。若對 X 中每個 x，都有 $\mathcal{S}$ 的某個成員 S 使得 $x \in S$，則 $\mathcal{S}$ 稱為 X 的拓樸子基。比較拓樸基與拓樸子基的定義，可以看到任何拓樸基都是拓樸子基，但反之不必然。舉例說，在 $\mathbb{R}$ 中所有形如 (a, ∞) 和 $(-\infty, b)$ 的「半無窮開區間」(其中 $a, b \in \mathbb{R}$) 合起來構成 $\mathbb{R}$ 的一個拓樸子基，這是因為任何實數都顯然屬於某個半無窮開區間。但這些半無窮開區間卻不構成拓樸基，因為它們不滿足拓樸基定義中的條件 (ii)。例如我們有 $0 \in (-\infty, 1) \cap (-1, \infty) = (-1, 1)$，但卻並不存在任何半無窮開區間 I 使得 $0 \in I$ 並且 $I \subseteq (-1, 1)$。

拓樸子基滿足以下定理。

定理 2：設 X 為集合，$\mathcal{S}$ 為 X 的拓樸子基，則 $\mathcal{S}$ 中有限個成員的交集組成的集合構成 X 的一個拓樸基。

綜合「定理 1」和「定理 2」，可以得到以下結果：設 X 為集合，$\mathcal{S}$ 為 X 的拓樸子基，則 $\mathcal{S}$ 中有限個成員的交集的任意并集構成 X 的一個拓樸，這個拓樸稱為「由拓樸子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓樸」。

仍以 $\mathbb{R}$ 為例，如前所述，$\mathbb{R}$ 中所有半無窮開區間構成一個拓樸子基。容易看到有限個半無窮開區間的交集是各種開區間 (包括空集)，例如 $(-\infty, 1) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, 1)$，$(1, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$，$(-\infty, 3) \cap (1, \infty) = (1, 3)$，$(-\infty, 1) \cap (3, \infty) = \emptyset$。所有這些開區間合起來構成 $\mathbb{R}$ 的一個拓樸基，請注意此一拓樸基跟前面討論過由所有開球組成的拓樸基是不同的 (因為此一拓樸基除了包含開球外，還包含半無窮開區間)，此一事實顯示，同一個拓樸空間可以被看成由不同的拓樸基生成的拓樸空間。

連結至數學專題
連結至周家發網頁