數學示例：向量與向量場

向量是重要的數學概念，在眾多數學學科以至物理學中都有廣泛應用，並且在不同學科中呈現不同的面貌。在流形分析中，向量具有雙重面貌，既有線性代數的內容，也有微積分的內容。本文主旨是介紹向量的此一特點，並簡介向量場的概念。

在線性代數中，向量是一種代數結構－「向量空間」(vector space) 的成員。為簡單起見，這裡討論的向量空間都是「實數域 $\mathbb{R}$ 上的向量空間」。由於我們在《感受伽羅瓦：向量空間與子域》中詳細介紹了向量空間，這裡不擬重複向量空間的定義，只想指出向量空間是指一個集合 V，連同 V 中元素之間的加法運算以及實數與 V 中元素的「純量乘法」(scalar multiplication) 運算。上述集合 V 中的元素稱為「向量」(vector)，其中必須至少包含一個零向量 0，$\mathbb{R}$ 的元素則稱為「純量」(scalar)。上述加法和純量乘法運算須滿足一系列公理，詳情請參閱上述網頁。

一個與向量空間密切相關的概念是有序基底(ordered basis)，設 $B = (e_1, \ldots, e_n)$ 是由向量空間 V 的元素組成的有序 n 元組[1]，若 V 中任何向量 v 都可唯一地表示成以下線性組合：

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \qquad (1)$$

其中 $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$，則 B 稱為 V 的有序基底，而 v_i $(1 \le i \le n)$ 則是 v 相對於 e_i 的「分量」(component)。

向量除可表示成 (1) 所示的線性組合外，也可表示成以下 $n \times 1$ 列矩陣的形式[2]：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

[1]由於有序基底的成員是有次序的，所以有序基底須表示成有序 n 元組而非集合。

[2]其實很多人都把向量寫成 $(v_1, \ldots, v_n)$ 的形式，在這種表達法下，「向量」與空間中的「點」在形式上沒有區別。由於在流形分析中，有時需要區分這兩者，所以這裡採用這種表達法。

但為方便行文，我們又可把上述 $n \times 1$ 列矩陣寫成以下形式：

$$[v_1, \ldots, v_n]^T$$

上式代表一個經「轉置」(transposition) 的 $1 \times n$ 行矩陣 (為清楚區分行矩陣中的各個項，上面各項之間加了逗號)，其中 T 代表轉置，即把一個矩陣的行與列對調的操作。請注意經轉置後，$1 \times n$ 行矩陣便變成 $n \times 1$ 列矩陣。

根據線性代數的知識，如要證明 B 是 V 的有序基底，要證明 B 的「生成空間」(span) 等於 V，並且 B 是「線性獨立」(linear independent) 的。由於以下的討論無需應用生成空間和線性獨立的概念，現略去有關定義，對這兩個概念感興趣的讀者請參閱前述網頁。這裡只須指出 V 可以有多個不同有序基底，但每個有序基底都必然包含相同數目的元素，這個數目稱為 V 的「維度」(dimension)。

舉例說，$\mathbb{R}^3$ 便是一個向量空間，這個空間中的向量可表示成 $[v_1, v_2, v_3]^T$ 的形式，其中 $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$，這個空間上的加法和純量乘法的定義如下：設 $[v_1, v_2, v_3]^T$ 和 $[w_1, w_2, w_3]^T$ 為 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，$c \in \mathbb{R}$，則

$$[v_1, v_2, v_3]^T + [w_1, w_2, w_3]^T = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]^T$$

$$c[v_1, v_2, v_3]^T = [cv_1, cv_2, cv_3]^T$$

此外，容易看到 $(e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T)$ 構成 $\mathbb{R}^3$ 的一個有序基底，這是因為任何 $[v_1, v_2, v_3]^T$ 都可唯一地表示成以下線性組合：

$$[v_1, v_2, v_3]^T = v_1[1, 0, 0]^T + v_2[0, 1, 0]^T + v_3[0, 0, 1]^T$$

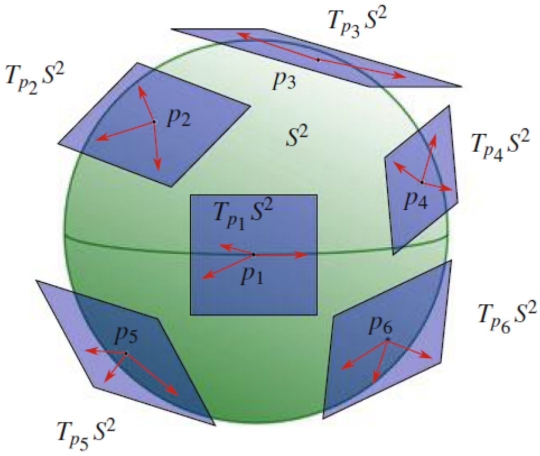
由於上述有序基底包含 3 個元素，因此 $\mathbb{R}^3$ 是 3 維空間。

以上是有關一般向量空間的知識，但在流形分析中，我們並不研究所有向量空間，而是集中研究一種特殊的向量空間－切空間(tangent space)，這是由切向量(tangent vector) 組成的空間。請注意「切向量」既包含微積分中的概念 (切線)，也包含線性代數中的概念 (向量)，正是此一概念把微積分與線性代數的知識匯集在一起。

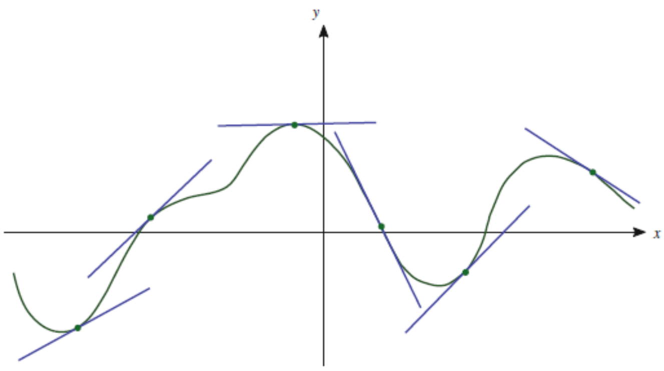
我們在《數學示例：切空間與可定向性》中詳細介紹了 2 維曲面切空間的概念。設 S 為曲面，p 為其上一點，那麼 S 上可以有多條通過 p 點的曲線，每條曲線於 p 點處都有無窮多個 (大小不等的) 切向量。可以證明所有這些曲線於 p 點處的所有切向量構成一個 2 維向量空間，可稱為「S 於 p 點處的切空間」，記作 T_pS，而 p 則稱為這個切空間的「基點」(base point)。請注意上述切空間是「寄生」於其基點上的，因此這個空間上的切向量是以其基點 (而非整個空間的坐標原點) 作為起點。此外，S 的每一點都可作

為基點，其上「寄生」著一個切空間。

下圖展示一個綠色球面 (記作 S^2) 及其上六點 (記作 p_1、...、p_6)，這六點的每一點處都「寄生」著一個藍色的切空間 (記作 $T_{p_1}S^2$、...、$T_{p_6}S^2$)。每個切空間上都繪出了若干個紅色的切向量，這些切向量都是以各個切空間的基點作為起點：



以上介紹的是 2 維曲面的切空間，接下來考慮 1 維曲線的切空間。設 C 為曲線，p 為其上一點，那麼 C 於 p 點處有無窮多個 (大小不等的) 切向量。可以證明所有這些切向量構成一個 1 維向量空間，可稱為「C 於 p 點處的切空間」，記作 T_pC。如同 2 維曲面的情況，C 的每一點都可作為基點，其上「寄生」著一個切空間。下圖展示一條曲線及其上六點，這六點的每一點處都「寄生」著一個切空間，這些切空間實際上是向兩邊無限延伸的直線 (即切線)，所以包含著無窮多個切向量：



事實上，我們還可以把切空間概念推廣到更一般的 n 維幾何圖形，稱為「流形」(manifold)。但由於我們暫時不擬引入流形的嚴格定義，以下僅把流形

粗略地看成常見幾何圖形的推廣，我們熟悉的直線、圓、球面、環面、球體等等都是流形的特例。此外，在引入流形的正式定義前，我們考慮的流形都是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，不考慮一般的流形。

設 M 為 m 維流形，p 為其上一點，那麼如同曲面和曲線的情況，可以定義 M 於 p 點處的切向量，而且可以證明所有這些切向量構成一個 m 維向量空間，可稱為「M 於 p 點處的切空間」，記作 T_pM。由於 T_pM 是「寄生」於 p 點上，有時為了清晰區別「寄生」於不同點上的向量，可以把 T_pM 中的向量 v 寫成 v_p。

舉例說，在球面 S^2 上，$(0,0,1)$ 和 $(0,0,-1)$ 點上都可以有 $[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 這兩個向量。表面上看，這兩個點上的 $[1,0]^T$ 似乎是同一個向量，但由於「寄生」於不同點上的向量屬於不同的向量空間，所以應視作不同的向量。為清晰起見，可以把這兩個向量分別記作 $[1,0]^T_{(0,0,1)}$ 和 $[1,0]^T_{(0,0,-1)}$。同理，上述兩點上的 $[0,1]^T$ 也可分別記作 $[0,1]^T_{(0,0,1)}$ 和 $[0,1]^T_{(0,0,-1)}$。請注意此一區分有時十分重要，因為一般來說，屬於不同向量空間的向量不能互相加減。

如同一般向量空間，T_pM 也有其有序基底。當然我們可以把這個有序基底寫成標準有序基底的形式，例如如果 T_pM 是 2 維向量空間，那麼其標準有序基底就是 $((e_1)_p = [1,0]^T_p, (e_2)_p = [0,1]^T_p)$。但在流形分析中，這個有序基底可以寫成另一種形式。為此，須先重溫微積分中「導數」(derivative) 和「方向導數」(directional derivative) 的概念。

設 $f(x)$ 為一元實值函數，p 為 $\mathbb{R}$ 上的某定點，那麼「f 於 p 的導數」，以下記作 $Df(p)$，可定義為以下極限值：

$$Df(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t) - f(p)}{t}$$

上述極限值可粗略地看成 f 在 p 點處的變化率。由於 p 被限制在實數線 $\mathbb{R}$ 上移動，它只能沿著 $\mathbb{R}$ 向右或向左移動，如容許 t 為正數或負數，那麼 p 的變化可表示成 $p+t$ 的形式。

現設 $f(x_1, x_2)$ 為二元實值函數，$p = (p_1, p_2)$ 為 $\mathbb{R}^2$ 上的某定點。在此情況下，p 可以沿著 2 維平面 $\mathbb{R}^2$ 上的任何直線移動，如用向量 $v = [v_1, v_2]^T$ 代表此一直線的方向，那麼可以把 p 沿著此一方向移動所到達的位置表示成 $(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$ 的形式，並從而求 f 在這一點處沿著此一方向的變化

率，此即「f 於 p 沿著 v 的方向導數」[3]，以下記作 $D_v f(p)$，其定義如下：

$$D_v f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2) - f(p_1, p_2)}{t}$$

根據微積分的知識，為求上述方向導數，可以運用以下公式而無需計算上述極限值：

$$D_v f(p) = v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p \qquad (2)$$

在上式中，$|_p$ 代表把 p_1 和 p_2 分別代入其前函數中的變項 x_1 和 x_2。舉例說，考慮函數 $f_I(x_1, x_2) = {x_1}^2 x_2$ 以及「寄生」於點 $(-3, 4)$ 處的向量 $v_I = [-1, 2]^T$，那麼根據 (2)，我們有

$$\begin{aligned} D_{v_I} f_I(-3,4) &= -\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_1}\right|_{(-3,4)} + 2 \left.\frac{\partial f_I}{\partial x_2}\right|_{(-3,4)} \\ &= -\left. 2x_1 x_2\right|_{(-3,4)} + 2 \left.{x_1}^2\right|_{(-3,4)} \\ &= (-2) \times (-3) \times 4 + 2 \times (-3)^2 \\ &= 42 \end{aligned}$$

以上是有關方向導數的傳統定義，接下來讓我們引入對方向導數的新觀點。在此一觀點下，我們考慮的向量是流形 M 於點 p 處的切空間 T_pM 上的向量 v_p，並把 v_p 看成一種線性「算子」(operator)，這個算子可作用於函數 f，其作用結果 $v_p[f]$ [4]就等於傳統的方向導數 $D_v f(p)$，即

$$v_p[f] = D_v f(p) \qquad (3)$$

把 (2) 和 (3) 結合，我們有

$$v_p[f] = v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p \qquad (4)$$

請注意上式適用於 T_pM 上的任何向量，特別地，它適用於前述 T_pM 標準有序基底的兩個成員 $(e_1)_p = [1, 0]_p^T$ 和 $(e_2)_p = [0, 1]_p^T$，現在讓我們看看把這兩個向量代入上式中會得到甚麼結果：

$$(e_1)_p[f] \;=\; 1 \times \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + 0 \times \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p$$

[3]一般微積分教科書都規定方向導數定義中的 v 須為單位向量，本文依從某些流形分析教科書的做法撤去此一限制，因此本文所指的「方向導數」跟一般微積分教科書有所不同，有必要時可稱為「廣義方向導數」以示區別。

[4]這裡沿用某些流形分析教科書的習慣，用方括號 [ ] 表示 v_p 對 f 的函數作用，惟請注意這裡的方括號跟圓括號 ( ) 其實沒有分別。換句話說，$v_p[f]$ 也可寫成 $v_p(f)$。

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p \\
(e_2)_p[f] &= 0 \times \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + 1 \times \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p \\
&= \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p
\end{aligned}
$$

由於 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p$ 和 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p$ 可分別看成把「偏微分算子」 $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p$ 和 $\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p$ 作用於函數 f 的結果，上述兩個計算可分別改寫成

$$
\begin{aligned}
(e_1)_p[f] &= \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p (f) \\
(e_2)_p[f] &= \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p (f)
\end{aligned}
$$

由此可得以下重要等式：

$$
(e_1)_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \quad (e_2)_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \qquad (5)
$$

至此我們看到，如果採取前述的新觀點，把 T_pM 上的向量看成一種算子，那麼可以把 2 維切空間 T_pM 的有序基底寫成 $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \right)$ 的形式。

容易把上述結果推廣到其他維度：設 M 為 m 維流形，則 T_pM 的有序基底可寫成 $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p \right)$ 的形式。上述結果告訴我們，T_pM 中的向量 v_p 除可表示成以下行矩陣形式外，

$$
v_p = [v_1, \ldots, v_m]_p^T \qquad (6)
$$

亦可表示成以下線性組合的形式：

$$
v_p = \sum_{i=1}^{m} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad (7)
$$

如同 2 維流形的情況，把「寄生」於 p 點處的向量寫成 (7) 的形式，實質上是把這個向量看成一個算子。把這個算子作用於一個 m 元實值函數 $f(x_1, \ldots, x_m)$，其結果 $v_p[f]$ 等於「f 於 p 沿著 v 的方向導數」，即 $D_v f(p)$，因此我們可以把向量 v_p 看成一種「方向導數算子」[5]。

[5]雖然 $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ 可被看成方向導數算子，但在一般應用中，如不涉及方向導數的計算，那麼只需把 $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ 當作有序基底符號看待，即跟 $(e_i)_p$ 沒有分別。

為加深了解，現把上述概念套用於前面討論過的「寄生」於點 $(-3,4)$ 上的向量 $v_I=[-1,2]^T$。如要清晰標明這個向量所「寄生」的點，可把它寫成以下兩種形式：

$$(v_I)_{(-3,4)}=[-1,2]^T_{(-3,4)}=-\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(-3,4)}+2\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(-3,4)} \qquad (8)$$

如前所述，把 $(v_I)_{(-3,4)}$ 寫成上述第二種形式，實質上是把這個向量看成一個方向導數算子。如把這個算子作用於前面討論過的函數 $f_I(x_1,x_2)=x_1{}^2x_2$，可得 (為免下式過於累贅，以下略去 v_I 的下標 $(-3,4)$)：

$$\begin{aligned} v_I[f_I] &= \left(-\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(-3.4)}+2\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(-3.4)}\right)[f_I] \\ &= -\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_1}\right|_{(-3.4)}+2\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_2}\right|_{(-3.4)} \\ &= 42 \end{aligned}$$

上述結果正等於前面求得的「f_I 於 $(-3,4)$ 沿著 v_I 的方向導數」$D_{v_I}f_I(-3,4)$。

如前所述，流形 M 的每一點 p 處都有一個切空間 T_pM。現在如果把所有點處的切空間的所有成員組成一個集合，便可得到 M 的切叢(tangent bundle)，記作 TM，即

$$TM=\{v_p\in T_pM:p\in M\} \qquad (9)$$

舉例說，前面曾經指出在球面 S^2 上，$[1,0]^T_{(0,0,1)}$ 和 $[0,1]^T_{(0,0,1)}$ 是切空間 $T_{(0,0,1)}S^2$ 的成員，$[1,0]^T_{(0,0,-1)}$ 和 $[0,1]^T_{(0,0,-1)}$ 則是切空間 $T_{(0,0,-1)}S^2$ 的成員。S^2 有無窮無盡的切空間，而每個切空間又有無窮無盡的成員。如把所有這些切空間的所有成員組成一個集合，便可得到切叢 TS^2，以下是這個切叢的其中四個成員[6]：

$$TS^2=\{[1,0]^T_{(0,0,1)},[0,1]^T_{(0,0,1)},[1,0]^T_{(0,0,-1)},[0,1]^T_{(0,0,-1)},\ldots\}$$

[6]根據這裡的定義，TM 是 M 上切向量的集合，但其實 TM 的嚴格定義應是有序對 (p,v_p) 的集合，其中 p 是 M 上的點，v_p 則是 p 點處的切向量。根據此一定義，TS^2 應寫成以下集合：

$$\begin{aligned} TS^2 = \{&((0,0,1),[1,0]^T_{(0,0,1)}),((0,0,1),[0,1]^T_{(0,0,1)}), \\ &((0,0,-1),[1,0]^T_{(0,0,-1)}),((0,0,-1),[0,1]^T_{(0,0,-1)}),\ldots\} \end{aligned}$$

由於這種表達法頗為累贅，所以這裡不予採用。

從切叢可以進一步得到向量場的概念。設 M 為流形，則 M 上的向量場(vector field) 是指以下函數[7]：

$$v : M \to TM;\ \ v(x) \in T_x M \qquad (10)$$

根據上式，v 這個函數以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出切叢 TM 的某個成員；但 $v(x)$ 並非 TM 的任意成員，而是必須滿足條件 $v(x) \in T_x M$，即 $v(x)$ 必須是 M 於 x 點處的切空間 $T_x M$ 中的某個向量。以前面討論過的球面 S^2 為例，設 v 為 S^2 上的向量場，那麼 v 把 S^2 上的點 x 映射為 TS^2 的成員，且須滿足 $v(x) \in T_x S^2$。例如 $v(0, 0, 1)$ 的值便可以是 $[1, 0]^T_{(0,0,1)}$，但不可以是 $[1, 0]^T_{(0,0,-1)}$，因為 $[1, 0]^T_{(0,0,1)} \in T_{(0,0,1)} S^2$ 而 $[1, 0]^T_{(0,0,-1)} \notin T_{(0,0,1)} S^2$。請注意我們在這裡採用相同的符號 v 來代表「向量」和「向量場」，根據上下文，應不會引致混淆。

從上述定義可見，向量場 v 不是把 M 映射到 TM 的任意函數，而是必須滿足 (10) 所示的條件。數學上把 v 對 TM 的此一特殊關係稱為「截面」(section)，即向量場是切叢的一個截面。由於數學上把一個「纖維叢」(fiber bundle) F 的截面記作 $\Gamma(F)$[8]，因此流形 M 上所有向量場組成的集合可記作 $\Gamma(TM)$[9]。

若 M 是 m 維流形，那麼向量場 v 的輸入是 M 上的可變點 x，其輸出值則是 m 維向量，可以採取向量的前述兩種表示形式：

$$v(x) = [v_1(x), \ldots, v_m(x)]^T_x \qquad (11)$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \qquad (12)$$

以上兩式跟 (6) 和 (7) 非常相似，所不同者僅在於前者中的 v、v_i $(0 \le i \le m)$ 等帶有可變論元 x，顯示這是函數 (即向量場)，而後者中的 v 等則帶有固定下標 p，顯示這是單個的向量。

接下來讓我們看一些向量場的例子，第一個例子是 2 維流形 $\mathbb{R}^2$ 上的以下向量場：

$$v_{II}(x_1, x_2) = [-1, 2]^T_{(x_1,x_2)} = -\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(x_1,x_2)} + 2\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2)} \qquad (13)$$

---

[7]請不要把「向量場」(vector field) 與「向量空間」(vector space) 混淆，儘管這兩者存在聯繫，前者是以向量為值的函數，後者則是由向量組成的代數結構。

[8]「纖維叢」和「截面」都是拓樸學的概念，這裡無意引入這些概念，讀者只須了解切叢是纖維叢的一種，並且 (10) 所示 v 對 TM 的關係是截面關係。

[9]現把本文介紹的四類集合及其符號總結如下：M 是某流形上所有點組成的集合，$T_p M$ 是 M 於 p 點處所有切向量組成的集合，TM 是 M 各點處所有切向量組成的集合，$\Gamma(TM)$ 是 M 上所有向量場組成的集合。

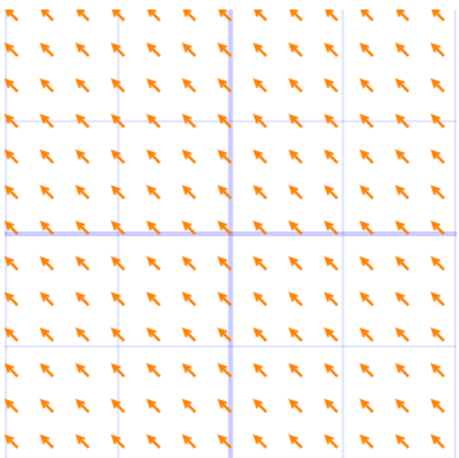
上式與 (8) 在形式上很相似，但兩者代表很不同的概念。前面 (8) 中的 $(v_I)_{(-3,4)}$ 代表某一定點 $(-3,4)$ 處的單個向量 $[-1,2]^T_{(-3,4)}$，它沒有提供 $\mathbb{R}^2$ 上其他點處向量的信息；上式中的 v_{II} 則代表一個向量場，這個向量場於 $\mathbb{R}^2$ 上各點處恆取某一向量常值作為輸出值，這些輸出值雖然都具有 $[-1,2]^T$ 的形式，但因「寄生」於不同點處，所以代表不同的向量，例如 $v_{II}(1,1)=[-1,2]^T_{(1,1)}$，$v_{II}(-3,4)=[-1,2]^T_{(-3,4)}$ 等等。由此可見，$(v_I)_{(-3,4)}$ 其實等於 $v_{II}(-3,4)$，即 $v_{II}(x_1,x_2)$ 眾多輸出值的一個。

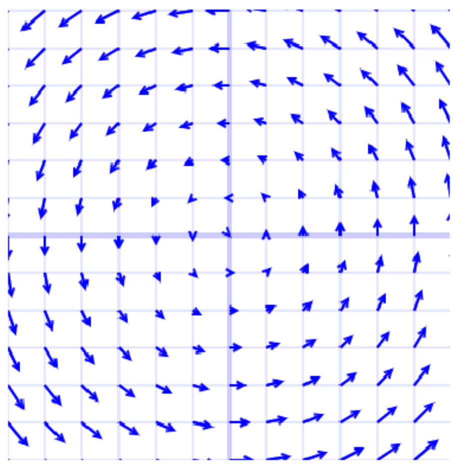
第二個例子是 $\mathbb{R}^2$ 上的以下向量場：

$$v_{III}(x_1,x_2)=[-x_2,x_1]^T_{(x_1,x_2)}=-x_2\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(x_1,x_2)}+x_1\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2)} \tag{14}$$

跟 (13) 中的常值向量場 v_{II} 不同，上述向量場在不同點處輸出不同形式的向量，例如 $v_{III}(1,1)=[-1,1]^T_{(1,1)}$，$v_{III}(-3,4)=[-4,-3]^T_{(-3,4)}$ 等等。

接著讓我們看一種用圖象表示向量場的方法，這種方法把向量場 v 看成代表某流體的流動情況，其中 v 於某點處的值就是該流體在該點處的切向量 (其方向代表流動方向，其模代表速率)，如下圖所示：





上面左圖代表 v_{II}，從該圖可見，這個向量場代表一個以勻速朝固定方向流動的流體。上面右圖則代表 v_{III}，從該圖可見，這個向量場代表一個按逆時針方向旋轉，並且在越遠離原點處其旋轉速率越大的流體。

如前所述，向量可被看成一種方向導數算子，因此向量場 v 可被看成一個「二重函數」。把這個函數先作用於點 p，其結果 $v(p)$ 是某一方向導數算子；如再把 $v(p)$ 作用於函數 f，其結果 $v(p)[f]$ 等於「f 於 p 沿著 $v(p)$ 的方向導數」。

以 v_{III} 為例，把這個函數分別作用於點 $(1,1)$ 和 $(-3,4)$，可得到以下兩個方向導數算子：

$$\begin{aligned} v_{III}(1,1) &= -\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,1)} + \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,1)} \\ v_{III}(-3,4) &= -4\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(-3,4)} - 3\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(-3,4)} \end{aligned}$$

如把上面第一個算子作用於前面討論過的函數 $f_I(x_1,x_2) = {x_1}^2 x_2$，可求得「$f_I$ 於 $(1,1)$ 沿著 $[-1,1]^T$ 的方向導數」：

$$\begin{aligned} v_{III}(1,1)[f_I] &= \left(-\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,1)} + \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,1)}\right)[f_I] \\ &= -\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_1}\right|_{(1,1)} + \left.\frac{\partial f_I}{\partial x_2}\right|_{(1,1)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

如把第二個算子作用於 f_I，可求得「f_I 於 $(-3,4)$ 沿著 $[-4,-3]^T$ 的方向導數」：

$$\begin{aligned} v_{III}(-3,4)[f_I] &= \left(-4\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(-3,4)} - 3\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(-3,4)}\right)[f_I] \\ &= -4\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_1}\right|_{(-3,4)} - 3\left.\frac{\partial f_I}{\partial x_2}\right|_{(-3,4)} \\ &= 69 \end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁