數學示例：楔積與內部積

我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中介紹了 k 向量和 k 餘向量的概念。如同一般的數學對象，k 向量和 k 餘向量也可進行各種代數運算。正如上述網頁所指出的，由於 k 向量和 k 餘向量組成的集合各自構成向量空間，它們可以進行一般向量空間所具有的加法和純量乘法運算，但這不是本文要介紹的內容，本文主旨是介紹 k 向量和 k 餘向量的兩種「乘法」運算－楔積和內部積。

在開始介紹這些運算前，首先重溫上述網頁介紹過的有關 k 餘向量的基本概念。為免討論過於冗長，以下集中討論 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中的成員，其中 M 為 m 維流形，p 為其上一點 (儘管以下內容也適用於 $\bigwedge^k V^*$ 中的成員，其中 V 是一般向量空間)。根據上述網頁，$\bigwedge^k T_p^*M$ 中的成員可以表示成以下有序基底的線性組合 (下式大致等於上述網頁中的 (26)，但為簡化數式，下式略去了下標 p)：

$$(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m) \qquad (1)$$

以下把上述有序基底的成員稱為「基底 k 餘向量」，它們也可被看成以 k 個向量為論元的實值函數。把基底 k 餘向量 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ 作用於 T_pM 中任意 k 個向量，等於從該 k 個向量取得第 i_1、...、第 i_k 個分量並組成一個方陣，然後求這個方陣的行列式。此外，根據上述網頁，上述函數具有多重線性和交錯性質，其中交錯性質是指若任意兩個論元對調位置，則函數值會改變正負號。此一性質也可表述為，若任意兩個論元相等，則函數值為 0。

以上重溫了 k 餘向量的知識，接下來要引入新的概念。為此，首先考慮 $\bigwedge^2 T_p^*\mathbb{R}^4$ [1]中的基底 2 餘向量 $dx_1 \wedge dx_3$，現把這個基底 2 餘向量作用於 $T_p\mathbb{R}^4$ 中的兩個向量 $[1, -2, 3, -4]^T$ 和 $[-5, 6, -7, 8]^T$：

$$\begin{aligned} & dx_1 \wedge dx_3([1, -2, 3, -4]^T, [-5, 6, -7, 8]^T) \\ = & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \\ = & \ 8 \end{aligned}$$

[1]這裡只需指明 $p \in \mathbb{R}^4$，而無需指明它究竟是哪一個點，因為這對以下的討論無關重要。

在上式中，$\wedge$ 符號是基底 2 餘向量 $dx_1 \wedge dx_3$ 的結構成分；但從另一角度看，也可把這個符號看成兩個基底 1 餘向量 dx_1 和 dx_3 之間的某種「乘法」運算。事實上，在流形分析中，$\wedge$ 正是楔積(wedge product)(又稱「外部積」exterior product) 此一乘法運算的符號，而上述計算可被看成求兩個基底 1 餘向量的楔積。

這麼一來，我們很自然會想到，既然可以求 dx_1 與 dx_3 的楔積 $dx_1 \wedge dx_3$，那麼應也可求 dx_3 與 dx_1 的楔積 $dx_3 \wedge dx_1$[2]。但 $dx_3 \wedge dx_1$ 究竟是甚麼？根據與 $dx_1 \wedge dx_3$ 的類比，$dx_3 \wedge dx_1$ 應該也是以 $T_p\mathbb{R}^4$ 中的兩個向量為論元的實值函數。事實上，我們完全可以運用前面提過的方法來求這個函數作用於任意兩個向量的結果，即把 $dx_3 \wedge dx_1$ 作用於任意兩個向量，等於從該兩個向量取得第 3 和第 1 個分量並組成一個方陣，然後求這個方陣的行列式。以下按照這個方法求 $dx_3 \wedge dx_1$ 對 $[1, -2, 3, -4]^T$ 和 $[-5, 6, -7, 8]^T$ 作用的結果：

$$\begin{aligned} & dx_3 \wedge dx_1([1, -2, 3, -4]^T, [-5, 6, -7, 8]^T) \\ = & \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ = & -8 \end{aligned}$$

比較以上兩個計算結果，可以看到它們數值相同但正負號相反，這不是偶然的，因為在進行上述兩個計算的過程中，所得的兩個方陣剛好對調了其中兩行的位置，而根據線性代數的知識，這樣的兩個方陣的行列式必然數值相同但正負號相反。由此可以推斷，給定任意兩個向量 $v_1, v_2 \in T_p\mathbb{R}^4$，都必然有 $dx_3 \wedge dx_1(v_1, v_2) = -dx_1 \wedge dx_3(v_1, v_2)$，我們可以把此一結果表述為 $dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3$。

容易看到，上述結論不只適用於 $dx_3 \wedge dx_1$ 這個特定的楔積，而是適用於任何兩個基底 1 餘向量的楔積，即給定任意 $dx_i, dx_j \in \bigwedge^1 T_p^* M$，我們有

$$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j \qquad (2)$$

如用文字表述，上式是說，把組成楔積的兩個基底 1 餘向量 dx_i 和 dx_j 對調位置，所得楔積會改變正負號。請注意此一性質跟前面介紹的 k 餘向量作為函數的「交錯」性質很相似，可不妨稱為 k 餘向量作為向量空間成員的「交錯」性質。如前所述，k 餘向量作為函數的「交錯」性質有另一種表述方式，因此 k 餘向量作為向量空間成員的「交錯」性質應也有另一種表述方式：若組成楔積的兩個基底 1 餘向量相同，則所得楔積等於 0。用數式寫出來，就是

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \qquad (3)$$

[2]請注意由於 $3 \not< 1$，$dx_3 \wedge dx_1$ 只能被看成 dx_3 與 dx_1 的楔積。反之，由於 $1 < 3$，$dx_1 \wedge dx_3$ 既可被看成一個基底 2 餘向量，也可被看成 dx_1 與 dx_3 的楔積。

請注意上式中的 0 不是實數 0，而是代表「零 2 餘向量」，即作用於任意兩個向量所得結果均為實數 0 的 2 餘向量。為驗證這一點，請讀者自行計算 $dx_1 \wedge dx_1([1,-2,3,-4]^T, [-5,6,-7,8]^T) = 0$。

上述討論的一個重要結論是，對基底 1 餘向量 dx_i 和 dx_j 進行楔積運算，即使 $i \not< j$，我們總能運用 (2) 或 (3) 把 $dx_i \wedge dx_j$ 改寫成 2 餘向量的形式。我們將上述結論總結為：兩個基底 1 餘向量的楔積是一個 2 餘向量。例如考慮 $dx_3 \wedge dx_1$, 雖然這個楔積表面上不具有 2 餘向量的形式 (因為 $3 \not< 1$), 但我們可以運用 (2) 得到 $dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3$，而 $-dx_1 \wedge dx_3$ 具有 2 餘向量的形式。另外又如 $dx_1 \wedge dx_1$, 雖然這個楔積表面上不具有 2 餘向量的形式 (因為 $1 \not< 1$), 但我們可以運用 (3) 得到 $dx_1 \wedge dx_1 = 0$, 而 0 是零 2 餘向量。

以上介紹的是兩個基底 1 餘向量之間的楔積，接下來考慮較一般的情況。設 M 為流形, $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ 是 $\bigwedge^k T_p^* M$ 中的基底 k 餘向量, $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$ 則是 $\bigwedge^l T_p^* M$ 中的基底 l 餘向量, 那麼對上述 k 餘向量和 l 餘向量進行楔積運算的結果 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$ 是一個以 T_pM 中 $k+l$ 個向量為論元的實值函數，把這個函數作用於 $k+l$ 個向量，等於從這些向量取得第 i_1、...、第 i_k、第 j_1、...、第 j_l 個分量並組成一個方陣, 然後求這個方陣的行列式。

舉例說，考慮 $\bigwedge^1 T_p^* \mathbb{R}^4$ 中的基底 1 餘向量 dx_4 與 $\bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^4$ 中的基底 2 餘向量 $dx_1 \wedge dx_2$ 的楔積 $dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2$，這個楔積是一個以 $T_p\mathbb{R}^4$ 中 $3\,(= 1+2)$ 個向量為論元的實值函數。現按照上段所述方法計算這個函數作用於 $T_p\mathbb{R}^4$ 上三個向量 $[1,-2,3,-4]^T$、$[-5,6,-7,8]^T$ 和 $[0,9,0,-10]^T$ 的結果：

$$
\begin{aligned}
& dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2([1,-2,3,-4]^T, [-5,6,-7,8]^T, [0,9,0,-10]^T) \\
= & \begin{vmatrix} -4 & 8 & -10 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 9 \end{vmatrix} \\
= & \ 148
\end{aligned}
$$

根據行列式的性質, 不難證明上述楔積也滿足交錯性質：設 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+l}}$ 為某楔積，若把組成這個楔積的任意兩個基底 1 餘向量對調位置，所得楔積會改變正負號。用數式寫出來，就是 (下式是 (2) 的推廣)：

$$
\begin{aligned}
& dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \ldots \wedge dx_{i_t} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+l}} \\
= & -dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_t} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+l}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

上述交錯性質也可表述為：若組成楔積的任意兩個基底 1 餘向量相同，則所得楔積等於 0。用數式寫出來，就是 (下式是 (3) 的推廣)：

$$
dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k+l}} = 0 \qquad (5)
$$

上述討論的一個重要結論是，對基底 k 餘向量 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ 和基底 l 餘向量 $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$ 進行楔積運算，即使並非 $i_1 < \ldots < i_k < j_1 < \ldots < j_l$，我們總能運用 (4) 或 (5) 把 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$ 改寫成 $k+l$ 餘向量的形式[3]。我們將上述結論總結為：一個基底 k 餘向量與一個基底 l 餘向量的楔積是一個 $k+l$ 餘向量。

以前面討論過的 $dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2$ 為例，雖然這個楔積表面上不具有 3 餘向量的形式 (因為並非 $4 < 1 < 2$)，但我們可以先運用 (4) 一次得到 $dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2$，然後再運用 (4) 一次得到 $-dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$。由此可得 $dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$，而 $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$ 具有 3 餘向量的形式。

接下來考慮一般 k 餘向量與一般 l 餘向量的楔積，根據前面的討論，此一楔積應是一個 $k+l$ 餘向量。由於一般多重餘向量是基底多重餘向量[4]的線性組合，進行上述楔積運算有點類似把兩個多項式相乘，其中 $\wedge$ 符號有點類似普通的乘號，因此滿足「$\wedge$ 對 $+$ 的分配律」(但請注意 $\wedge$ 不滿足交換律)，而多重餘向量的各個分量則類似多項式的係數，滿足多項式係數的運算法則。此外，在進行楔積運算時，還要運用前面的 (4) 和 (5) 來把計算結果改寫成 $k+l$ 餘向量的形式。

以下用一個例子以作說明。考慮 $\bigwedge^1 T_p^*\mathbb{R}^4$ 中的 1 餘向量

$$\alpha_I = 3dx_1 - dx_2 + 2dx_3 \qquad (6)$$

和 $\bigwedge^2 T_p^*\mathbb{R}^4$ 中的 2 餘向量

$$\alpha_{II} = 2dx_2 \wedge dx_4 - 5dx_3 \wedge dx_4 \qquad (7)$$

以下讓我們計算 $\alpha_I \wedge \alpha_{II}$，此一楔積應是 $\bigwedge^3 T_p^*\mathbb{R}^4$ 中的 3 餘向量：

$$\begin{aligned}
& \alpha_I \wedge \alpha_{II} \\
= \ & (3dx_1 - dx_2 + 2dx_3) \wedge (2dx_2 \wedge dx_4 - 5dx_3 \wedge dx_4) \\
= \ & (3)(2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (3)(-5)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& +(-1)(2)dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (-1)(-5)dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
& +(2)(2)dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (2)(-5)dx_3 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
= \ & 6dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 15dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - 2(0) \\
& +5dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + 4dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - (10)(0) \\
= \ & 6dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 15dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4
\end{aligned}$$

[3]在運用 (4) 時，我們要選擇把組成楔積的哪兩個基底 1 餘向量對調位置，可以證明此一選擇不會影響把楔積改寫成 $k+l$ 餘向量形式的最終結果。

[4]這裡「多重餘向量」是 k 餘向量、l 餘向量等的統稱。類似地，以下把微分 k 形式、微分 l 形式等統稱為「微分多重形式」，把 k 向量、l 向量等統稱為「多重向量」，並把 k 向量場、l 向量場等統稱為「多重向量場」。

我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中曾指出，純量 (即實數) 可被看成 0 餘向量。在此一觀點下，純量與 k 餘向量之間的純量乘法也可被看成一種楔積，即 0 餘向量與 k 餘向量之間的楔積，例如 $2dx_2 \wedge dx_4$ 便可被寫成

$$2 \wedge dx_2 \wedge dx_4$$

請注意根據前面的討論，上式是一個 $2\,(= 0 + 2)$ 餘向量，與 $2dx_2 \wedge dx_4$ 一致。

多重餘向量之間的楔積滿足以下定理。

定理 1：設 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge^k T_p^* M$，$\beta, \beta_1, \beta_2 \in \bigwedge^l T_p^* M$，$c \in \mathbb{R}$，則

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$

(ii) $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$

(iii) $(c\alpha) \wedge \beta = c(\alpha \wedge \beta)$

(iv) $\alpha \wedge (c\beta) = c(\alpha \wedge \beta)$

上述定理的內容可以概括為：組成楔積的兩個多重餘向量相對於該楔積來說具有雙重線性性質。

如同一般的乘法，我們可以把多於兩個的多重餘向量組成楔積，而且這種楔積具有結合性。但跟一般乘法不同，多重餘向量的楔積並不具有交換性。把組成楔積的兩個相鄰多重餘向量對調位置，可能使楔積相差一個正負號，以下定理概括楔積運算的上述兩個特點。

定理 2：設 $\alpha_1 \in \bigwedge^{k_1} T_p^* M$，$\alpha_2 \in \bigwedge^{k_2} T_p^* M$，$\alpha_3 \in \bigwedge^{k_3} T_p^* M$，則

(i) $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_3)$

(ii) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \wedge \alpha_1 \qquad (8)$

以前面討論過的 1 餘向量 α_I 和 2 餘向量 α_{II} 為例，根據 (8)，容易求得

$$\begin{aligned} & \alpha_{II} \wedge \alpha_I \\ = \ & (-1)^{1\times 2} \alpha_I \wedge \alpha_{II} \\ = \ & \alpha_I \wedge \alpha_{II} \\ = \ & 6dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 15dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

讀者可應用前面介紹的方法直接計算 $\alpha_{II} \wedge \alpha_I$，以驗證上述結果。

以上討論的是多重餘向量之間的楔積。根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，微分 k 形式是把流形 M 上的點映射為 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中的 k 餘向量的函數，因此我們可以借助此一函數作用來定義微分多重形式之間的楔積。具體地說，設 α 為微分 k 形式，β 為微分 l 形式，則 $\alpha\wedge\beta$ 是一個微分 $k+l$ 形式，即一個以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出 $k+l$ 餘向量的函數，這個函數滿足

$$(\alpha\wedge\beta)(x)=\alpha(x)\wedge\beta(x) \qquad (9)$$

請注意上式右端的 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 分別是 k 餘向量和 l 餘向量，所以它們的楔積是 $k+l$ 餘向量，符合我們的要求。可以證明，如上定義的楔積滿足前面介紹的各個計算方法和定理。

舉例說，考慮 $\Gamma(\bigwedge^1 T^*\mathbb{R}^4)$ 中的微分 1 形式

$$\alpha_{III}(x_1,x_2,x_3,x_4)=3x_1dx_1+(x_2x_3-1)dx_2+2{x_4}^2dx_3 \qquad (10)$$

和 $\Gamma(\bigwedge^2 T^*\mathbb{R}^4)$ 中的微分 2 形式

$$\alpha_{IV}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_4)dx_2\wedge dx_4-5dx_3\wedge dx_4 \qquad (11)$$

以下讓我們應用 (9) 進行以下計算：

$$\begin{aligned}
& (\alpha_{III}\wedge\alpha_{IV})(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
= {} & \alpha_{III}(x_1,x_2,x_3,x_4)\wedge\alpha_{IV}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
= {} & (3x_1dx_1+(x_2x_3-1)dx_2+2{x_4}^2dx_3)\wedge((x_1-x_4)dx_2\wedge dx_4-5dx_3\wedge dx_4)\\
= {} & (3x_1)(x_1-x_4)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+(3x_1)(-5)dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
& +(x_2x_3-1)(x_1-x_4)dx_2\wedge dx_2\wedge dx_4+(x_2x_3-1)(-5)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\\
& +(2{x_4}^2)(x_1-x_4)dx_3\wedge dx_2\wedge dx_4+(2{x_4}^2)(-5)dx_3\wedge dx_3\wedge dx_4\\
= {} & (3{x_1}^2-3x_1x_4)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4-15x_1dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4\\
& +(-2x_1{x_4}^2-5x_2x_3+2{x_4}^3+5)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4
\end{aligned}$$

現在如把 $(1,0,0,-1)$ 代入上式中的 (x_1,x_2,x_3,x_4)，可得

$$(\alpha_{III}\wedge\alpha_{IV})(1,0,0,-1)=6dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4-15dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$$

另一方面，如把 $(1,0,0,-1)$ 分別代入 α_{III} 和 α_{IV} 中的 (x_1,x_2,x_3,x_4)，可得

$$\alpha_{III}(1,0,0,-1)=3dx_1-dx_2+2dx_3$$

$$\alpha_{IV}(1,0,0,-1)=2dx_2\wedge dx_4-5dx_3\wedge dx_4$$

以上兩個結果分別等於前面討論過的 α_I 和 α_{II}，因此 $(\alpha_{III}\wedge\alpha_{IV})(1,0,0,-1)$ 應等於 $\alpha_I\wedge\alpha_{II}$，但我們在前面已算得 $\alpha_I\wedge\alpha_{II}=6dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4-15dx_1\wedge$

$dx_3 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$，這正與上述結果一致。

以上詳細介紹了多重餘向量和微分多重形式的楔積，由於「多重向量」和「多重向量場」是分別與「多重餘向量」和「微分多重形式」相平行的概念，上述楔積概念以及相關的性質和定理也適用於多重向量和多重向量場。為免重複，本文略去這方面的例子。k 向量和 k 餘向量各自形成的向量空間連同楔積運算，構成一個代數結構，稱為外代數(exterior algebra)，亦稱「格拉斯曼代數」(Grassmann algebra)。

楔積是一種「同類積」，參與楔積的兩項必須同為多重餘向量或同為多重向量。接著讓我們介紹內部積(interior product)，這是一種「異類積」，是 k 餘向量與向量之間的運算[5]。設 M 為流形，α 為 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中的 k 餘向量 $(k \geq 1)$，w 為 T_pM 中的某個特定向量，那麼 α 與 w 的內部積，記作 $\iota_w\alpha$，是 $\bigwedge^{k-1} T_p^*M$ 中的的 $k-1$ 餘向量，這個 $k-1$ 餘向量以 T_pM 中的任意 $k-1$ 個向量 v_1、...、v_{k-1} 作為輸入，並輸出以下結果：

$$\iota_w\alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(w, v_1, \ldots, v_{k-1}) \qquad (12)$$

在上述定義中, α 是 k 餘向量, 需要 k 個向量作為其輸入, 其中 $k-1$ 個就是 $\iota_w\alpha$ 的輸入 v_1、...、v_{k-1}, 餘下 1 個則是 w。粗略地說, 把 k 餘向量 α 與向量 w 進行內部積運算的效果就是把 w 變成固定的第一輸入項，因此 $\iota_w\alpha$ 只能有 $k-1$ 個任意輸入項, 可以證明如上定義的 $\iota_w\alpha$ 的確具有 $k-1$ 餘向量的性質。

以前面討論過的 2 餘向量 α_{II} 為例，現設有 $T_p\mathbb{R}^4$ 中的特定向量

$$w_I = [1, -2, 3, -4]^T \qquad (13)$$

那麼根據上段的討論, $\iota_{w_I}\alpha_{II}$ 是一個 1 餘向量。為把 $\iota_{w_I}\alpha_{II}$ 寫成 $\bigwedge^1 T_p^*\mathbb{R}^4$ 的有序基底的線性組合,我們把它作用於 $T_p\mathbb{R}^4$ 中的任意向量 $v = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T$, 並根據 (12) 進行以下計算[6]：

$$\begin{aligned}
\iota_{w_I}\alpha_{II}(v) &= \alpha_{II}(w_I, v) \\
&= (2dx_2 \wedge dx_4 - 5dx_3 \wedge dx_4)([1, -2, 3, -4]^T, [v_1, v_2, v_3, v_4]^T) \\
&= 2dx_2 \wedge dx_4([1, -2, 3, -4]^T, [v_1, v_2, v_3, v_4]^T) \\
&\quad -5dx_3 \wedge dx_4([1, -2, 3, -4]^T, [v_1, v_2, v_3, v_4]^T) \\
&= 2\begin{vmatrix} -2 & v_2 \\ -4 & v_4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & v_3 \\ -4 & v_4 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

[5]請不要把“interior product”與另一概念“inner product”混淆，為清楚區分這兩者，本文把這兩者分別譯作「內部積」和「內積」。如欲了解「內積」，請參閱《數學示例：內積空間》。

[6]以下計算要應用我們在《數學示例：餘向量與 1 形式》中提過的事實：$dx_i(v) = v_i$，即把 dx_i 作用於 v，所得結果是 v 的第 i 個分量。

$$
\begin{aligned}
&= 2(-2v_4 + 4v_2) - 5(3v_4 + 4v_3) \\
&= 8v_2 - 20v_3 - 19v_4 \\
&= 8dx_2(v) - 20dx_3(v) - 19dx_4(v) \\
&= (8dx_2 - 20dx_3 - 19dx_4)(v)
\end{aligned}
$$

由於 v 是任意向量，由此可得

$$\iota_{w_I}\alpha_{II} = 8dx_2 - 20dx_3 - 19dx_4$$

在上述定義中，如果 α 是 1 餘向量，則 $\iota_w\alpha$ 將是一個 0 餘向量。由於 0 餘向量需要 0 個輸入值，(12) 變成

$$\iota_w\alpha = \alpha(w) \qquad (14)$$

以前面討論過的 1 餘向量 α_I 為例，如沿用前述特定向量 w_I，那麼根據上式，我們有

$$
\begin{aligned}
\iota_{w_I}\alpha_I &= \alpha_I(w_I) \\
&= (3dx_1 - dx_2 + 2dx_3)([1, -2, 3, -4]^T) \\
&= 3(1) - (-2) + 2(3) \\
&= 11
\end{aligned}
$$

k 餘向量與向量的內部積滿足以下定理。

定理 3：設 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge^k T_p^*M$，$w, w_1, w_2 \in T_pM$，$c \in \mathbb{R}$，則

(i) $\iota_w(\alpha_1 + \alpha_2) = \iota_w\alpha_1 + \iota_w\alpha_2$

(ii) $\iota_{(w_1+w_2)}\alpha = \iota_{w_1}\alpha + \iota_{w_2}\alpha$

(iii) $\iota_w(c\alpha) = c(\iota_w\alpha)$

(iv) $\iota_{cw}\alpha = c(\iota_w\alpha)$

上述定理的內容可以概括為：參與內部積運算的 k 餘向量和向量相對於該內部積來說具有雙重線性性質。

根據定義 (12) 計算內部積有時頗為繁瑣，但我們可以運用以下定理計算基底 k 餘向量與向量 w 的內部積。綜合運用以下定理和「定理 3」便可求得一般 k 餘向量與 w 的內部積。

定理 4：設 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ 為 $\bigwedge^k T_p^* M$ 中的基底 k 餘向量，$w \in T_p M$，則

$$\iota_w(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} dx_{i_s}(w)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \qquad (15)$$

在上式中，$\widehat{dx_{i_s}}$ 代表略去 dx_{i_s} 這一項。接下來讓我們再算一次 $\iota_{w_I}\alpha_{II}$ (請注意在以下計算中，無需引入任意向量 v，也無需計算行列式)：

$$\begin{aligned}
\iota_{w_I}\alpha_{II} &= \iota_{w_I}(2dx_2 \wedge dx_4 - 5dx_3 \wedge dx_4) \\
&= 2(\iota_{w_I}(dx_2 \wedge dx_4)) - 5(\iota_{w_I}(dx_3 \wedge dx_4)) \\
&= 2 \times ((-1)^{1-1} dx_2(w_I)(dx_4) + (-1)^{2-1} dx_4(w_I)(dx_2)) \\
&\quad -5 \times ((-1)^{1-1} dx_3(w_I)(dx_4) + (-1)^{2-1} dx_4(w_I)(dx_3)) \\
&= 2 \times ((1)(-2)(dx_4) + (-1)(-4)(dx_2)) \\
&\quad -5 \times ((1)(3)(dx_4) + (-1)(-4)(dx_3)) \\
&= 8dx_2 - 20dx_3 - 19dx_4
\end{aligned}$$

這與前面的計算結果一致。

以上介紹的是 k 餘向量與向量之間的內部積，我們可以將此運算推廣為微分 k 形式與向量場之間的內部積。設 α 為微分 k 形式，w 為向量場，則 $\iota_w\alpha$ 是一個微分 $k-1$ 形式，即一個以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出 $k-1$ 餘向量的函數，這個函數滿足

$$(\iota_w\alpha)(x) = \iota_{w(x)}\alpha(x) \qquad (16)$$

請注意上式右端的 $\alpha(x)$ 和 $w(x)$ 分別是 k 餘向量和向量，所以它們的內部積是 $k-1$ 餘向量，符合我們的要求。可以證明，如上定義的內部積滿足前面介紹的各個計算方法和定理。

以前面討論過的微分 2 形式 α_{IV} 為例，現設有 $\Gamma(T\mathbb{R}^4)$ 中的向量場

$$w_{II}(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, 2x_4, -3x_4, -4x_1]^T \qquad (17)$$

以下讓我們應用 (16)、(12)、「定理 3」和「定理 4」進行以下計算：

$$\begin{aligned}
&(\iota_{w_{II}}\alpha_{IV})(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
=\ & \iota_{w_{II}(x_1,x_2,x_3,x_4)}\alpha_{IV}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
=\ & \iota_{[x_1,2x_4,-3x_4,-4x_1]^T}((x_1 - x_4)dx_2 \wedge dx_4 - 5dx_3 \wedge dx_4) \\
=\ & (x_1 - x_4)\left(\iota_{[x_1,2x_4,-3x_4,-4x_1]^T}(dx_2 \wedge dx_4)\right) - 5\left(\iota_{[x_1,2x_4,-3x_4,-4x_1]^T}(dx_3 \wedge dx_4)\right) \\
=\ & (x_1 - x_4)(2x_4 dx_4 - (-4x_1 dx_2)) - 5 \times (-3x_4 dx_4 - (-4x_1 dx_3)) \\
=\ & (4{x_1}^2 - 4x_1x_4)dx_2 - 20x_1 dx_3 + (2x_1x_4 - 2{x_4}^2 + 15x_4)dx_4
\end{aligned}$$

現在如把 $(1,0,0,-1)$ 代入上式中的 (x_1,x_2,x_3,x_4)，可得

$$(\iota_{w_{II}}\alpha_{IV})(1,0,0,-1) = 8dx_2 - 20dx_3 - 19dx_4$$

另一方面，前面曾指出 $\alpha_{IV}(1,0,0,-1)$ 等於前面討論過的 α_{II}，現在如把 $(1,0,0,-1)$ 代入 w_{II} 中的 (x_1,x_2,x_3,x_4)，可得

$$w_{II}(1,0,0,-1) = [1,-2,3,-4]^T$$

此一結果等於前面討論過的 w_I，因此根據 (16)，$(\iota_{w_{II}}\alpha_{IV})(1,0,0,-1)$ 應等於 $\iota_{w_I}\alpha_{II}$，但我們在前面已算得 $\iota_{w_I}\alpha_{II} = 8dx_2 - 20dx_3 - 19dx_4$，這正與上述結果一致。

基於 k 向量與 k 餘向量的對稱性，我們也可定義 k 向量與餘向量之間的內部積。設 M 為流形，v 為 $\bigwedge^k T_pM$ 中的 k 向量 $(k \geq 1)$，β 為 T_p^*M 中的某個特定餘向量，那麼 v 與 β 的內部積，記作 $\iota_\beta v$，是 $\bigwedge^{k-1} T_pM$ 中的的 $k-1$ 向量，這個 $k-1$ 向量以 T_p^*M 中的任意 $k-1$ 個餘向量 α_1、...、α_{k-1} 作為輸入，並輸出以下結果：

$$\iota_\beta v(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}) = v(\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}) \qquad (18)$$

請注意上式跟 (12) 完全平行, 由此可以預期, 這種內部積跟 (12) 所定義的內部積有相同的計算方法和性質, 而且還可以推廣為 k 向量場與微分 1 形式之間的內部積, 得出與 (16) 平行的公式。但為免重複內容, 這裡不作詳細介紹。

連結至數學專題
連結至周家發網頁