逻辑学研究 2019 年第 1 期，70–91
文章编号：1674-3202(2019)-01-0070-22

包含广义量词的关系三段论

周家发

摘　要：本文介绍一种推导有效关系三段论格式的方法，这种方法建基于广义量词理论和命题逻辑的一些基本原理，包括代入法、演绎定理、前提代换、引入存在假设、等价变换等。本文显示利用此方法，不仅可推导包含经典量词的关系三段论，还可推导出包含非经典量词（例如数值量词、比例量词、模糊量词）的关系三段论。除了讨论包含一般二元谓词的关系三段论外，本文也讨论了包含比较形容词的关系三段论，同时也证明了上述方法的有效性，并讨论了进一步研究的方向。

关键词：关系三段论；广义量词理论；数值量词；比例量词；模糊量词

中图分类号：B81　　　　**文献标识码**：A

1　引言

关系三段论（relational syllogism）是指在前提和结论中至少有一个语句包含二元或更高元谓词的三段论，有别于仅由包含一元谓词的语句组成的简单三段论（simple syllogism）。这类三段论是三段论研究的难点，因为它所包含的语句具有较复杂的句法结构，例如带有宾语或关系从句。因此，历来对关系三段论的研究不多，由上世纪后期开始才出现较多研究关系三段论的文献，如 [3, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 20–23] 等。

上述文献所研究的关系三段论大多只限于包含经典量词（即英语的“every”、“no”、“some”和“not every”）的关系三段论，经典量词无疑是逻辑研究中最重要的量词，对它们作深入研究无可厚非；但如果把研究范围仅限于经典量词，将会错失很多有效的推理。事实上，当代很多研究三段论的学者已发掘出大量包含非经典量词（亦称“广义量词”）的三段论，这些非经典量词包括数值量词（如 [12, 13, 16, 19]）、比例量词（如 [4, 15]）、模糊量词（如 [9, 15, 25]）等。但上述学者所研究的包含非经典量词的三段论大多局限于简单三段论，如何发掘包含非经典量词的关系三段论，是一个值得探讨的问题。

收稿日期：2017-04-20
作者信息：周家发　香港理工大学中文及双语学系
kfzhouy@yahoo.com

本文主旨是介绍一种推导有效关系三段论的新方法，以下是本文将会讨论的关系三段论实例：

(1) 每个爱一个女孩的（个体）都唱了一首歌，每个男孩都爱一个女孩，所以每个男孩都唱了一首歌。

(2) 在运动员中，除了最多两人外，所有人都得到奖项，至少五名男孩是运动员，所以至少三名男孩得到奖项。

(3) 所有马都是动物，几乎所有兽医都喜爱所有动物，所以大多数兽医喜爱所有马。

(4) 有人报读了几乎所有课程，几乎所有课程都是必修的，在报读了几乎所有课程的人中，少于一半能够结业，所以并非每个报读了大多数必修课程的人都能够结业。

(5) 在报读了所有必修课程的人中，除了最多两人外，所有人都能够结业，至少有五人报读了所有课程，所有必修课程都是课程，所以至少有三个报读了所有课程的人能够结业。

(6) 每个篮球员都比大多数骑师高，有游泳选手比（至少）一个篮球员高，所以有游泳选手比大多数骑师高。

(7) 存在至少一个骑师，每个篮球员都比大多数骑师高，有游泳选手比（至少）一个篮球员高，所以大多数骑师比（至少）一个游泳选手矮。

上述推理实例展示了关系三段论的复杂性。由于关系三段论是有关多元量化句（即包含多于一个量词的量化句）的三段论，而这些多元量化句可以包含不同种类的量词，所以其情况远较简单三段论复杂。举例说，(4) 便同时包含模糊量词“几乎所有”、比例量词“少于一半”和经典量词“并非每个”，(5) 则同时包含数值量词“至少五个”和经典量词“所有”。非经典量词本身已很复杂（如要在一阶逻辑下处理带有数值量词的语句，必须使用复杂的表达式或者定义新的量词；在一阶逻辑下，更无法处理包含一般比例量词或模糊量词的语句），包含不同种类量词的关系三段论就更加复杂，无法用一阶逻辑来处理。请注意上列实例所代表的推理格式是以往学者没有提出过的格式，但却可以用本文介绍的方法推导出来。

如前所述，对于关系三段论，历来研究不多，这是因为这类研究存在很大难度。首先，对于包含非经典量词的简单三段论而言，至今学者无法找出所有有效三段论格式，这是因为非经典量词的数目远多于经典量词的数目，而且要用到更复杂的数学工具（模糊量词尤其如此）。其次，即使就仅包含经典量词的简单三段论而言，传统的研究也只限于符合某些特定格式的三段论，只要对这些特定格式作出更改（例如容许三段论中的大项 / 中项 / 小项带有否定词、合取词等逻辑联结词，或者对大项 / 中项 / 小项在三段论中出现的次数不加限制），便已超出传统

三段论研究的范围，同样难以找出所有有效三段论格式，例如以下就是一个超出传统研究范围的有效三段论格式：

(8) 所有 C 是 B，所有非 C 是 B，所以所有 A 是 B。

既然上述简单三段论的研究存在一定难度，由此可知相对应的关系三段论的研究就更是难上加难。

为此，本文采取新的研究路向。简言之，本文并不直接推导有效的关系三段论格式，而是把有效的关系三段论建基于（一个或多个）有效简单三段论和某些命题逻辑基本原理之上。换句话说，本文的研究重点是如何从（一个或多个）有效的简单三段论和命题逻辑的某些基本原理推导出有效的关系三段论，请注意本文的方法对简单三段论的格式以及所含量词的种类并无限制，因此只要找到符合本文所提要求的有效简单三段论，便可推导出包含不同种类量词的有效关系三段论格式，例如上面的 (4) 和 (5)。

接下来介绍本文将用到的形式表达式及其语义解释。本文基本采用 [5, 6] 提出的一种表达式来表达量化句，但会使表达式更贴近自然语言的表层结构。这种表达式具有 $\mathbf{Q}(\mathbf{X_1}, ...\mathbf{X_n})$ 的形式，其中 $\mathbf{Q}$ 代表量词，$(\mathbf{X_1}, ...\mathbf{X_n})$ 代表作为 $\mathbf{Q}$ 的论元的谓词，这些谓词又有自己的论元。因此量词可被看成二阶谓词，它以（一阶）谓词作为其论元。本文采用当代广义量词理论，把量词的语义解释成以集合或集合的有序 n 元组作为论元的函数，因此量化句的语义可以用集合论表达式来表达。举例说，语句“有男孩跑步”的表达式是：

(9) $\mathbf{some}(\mathbf{boy}, \mathbf{run})$

在上述表达式中，**some** 是带有两个论元的量词（以下称为 $\langle 1,1\rangle$ 型量词），这两个论元可分别称为左论元和右论元。根据广义量词理论，上述表达式的语义解释可以表达成以下集合论公式：

(10) $\mathrm{boy} \cap \mathrm{run} \neq \emptyset$

在上式中，boy 和 run 分别代表 **boy** 和 **run** 的语义解释[1]，即由男孩和跑步者组成的集合。请注意 (10) 也可以被看成 (9) 的真值条件：(9) 是真的当且仅当 (10) 成立，即男孩集合与跑步者集合的交集非空。

(9) 这种表达式只包含一元谓词和一个量词，所以只能用来表达简单三段论中的语句。为表达关系三段论，便要使用二元（或更高元）的谓词和两个（或多个）量词。本文采用嵌套表达式来表达这些语句，这种表达式的特点是一个量化表达式内嵌套着另一个量化表达式，例如“每个男孩都爱（至少）一个女孩”的表达式是：

[1] 本文采用黑体字表示形式表达式，并用普通字体表示这些表达式的语义解释。

(11) $\mathbf{every}(\mathbf{boy}, \mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love}))$

在上式中，**every** 是 $\langle 1, 1\rangle$ 型量词，其左论元是 **boy**，右论元则是下列量化表达式：

(12) $\mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love})$

在上式中，**girl** 带有下标 **acc**，这个下标是 accusative（宾格）一词的缩写，代表“（至少）一个女孩”是作为及物动词“爱”的宾语。[2] 这个下标也可用来提醒我们，上式不是完整的语句，而是表达一个一元谓词。事实上，根据 [5]，(12) 的语义解释是以下集合：

(13) $\{x : \mathrm{some}(\mathrm{girl}, \{y : \mathrm{love}(x, y)\})\}$

上式告诉我们，(12) 表达一元谓词“爱（至少）一个女孩的（个体)”。当然，应用 **some** 的语义解释，还可以进一步把上式改写成：

(14) $\{x : \mathrm{girl} \cap \{y : \mathrm{love}(x, y)\} \neq \emptyset\}$

尽管上式使用了纯粹的集合论语言（上式用 $\cap$、$\neq$ 和 $\emptyset$ 这些集合论符号表达 **some** 的语义），但跟 (13) 比较，上式隐去了与 **some** 的关系；而且如要讨论抽象的量词（即以变项形式出现的量词，例如 Q），更无法使用纯粹的集合论语言。因此本文在提到量化表达式的语义解释时，将主要使用 (13) 这种形式。一般地，我们有：

(15) 设 Q 为 $\langle 1, 1\rangle$ 型量词，A 为一元谓词，R 为二元谓词，则 $\mathbf{Q}(\mathbf{A}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{R})$ 的语义解释为 $\{x : Q(A, \{y : R(x, y)\})\}$。

由于 (12) 实质上是一元谓词，它不能单独用来表达语句。如要表达语句，必须像 (11) 那样把 (12) 作为论元嵌套在另一个量化表达式的内部；另一种方法是引入不受约束的个体变项 **x**，把 (12) 改写成如下的“开语句”(open sentence)：

(16) $\mathbf{x}(\mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love}))$

上式的意思是“x 爱（至少）一个女孩”。请注意上式使用了广义量词理论处理个体词项（包括个体常项和个体变项）的方式，把个体词项看成带有一个论元的量词。根据广义量词理论，上式的语义解释可以表达成以下集合论公式：

(17) $x \in \{x : \mathrm{some}(\mathrm{girl}, \{y : \mathrm{love}(x, y)\})\}$

上述嵌套表达式不仅可用来表达带有宾语的量化句，也可用来表达带有复杂主语（指包含关系从句的主语）的量化句，例如“每个爱（至少）一个女孩的（个体）都快乐”的表达式是：

(18) $\mathbf{every}(\mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love}), \mathbf{happy})$

[2] **acc** 尽管在表面上依附于 **girl**，但实质上是作用于整个 **some(girl)** 结构。从语法上看，充当“爱”宾语的是“(至少) 一个女孩”而非仅“女孩”。

在上式中，$\mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love})$ 出现于量词 **every** 的左论元位置，在语法上相当于一个用来修饰主语的关系从句。我们甚至可以用嵌套表达式表达同时带有复杂主语和宾语的量化句，例如“每个爱（至少）一个女孩的（个体）都唱了（至少）一首歌”的表达式是：

(19) $\mathbf{every}(\mathbf{some}(\mathbf{girl}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{love}), \mathbf{some}(\mathbf{song}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{sing}))$

在结束本节前，有必要指出，当代很多学者并不对三段论的格式作严格规定，甚至不对三段论的前提和结论数目作严格规定。对很多学者而言，三段论成了包含至少两个前提和一个结论的量化句衍推关系的同义词。因此本文也对三段论作较宽松的理解，但把讨论范围限于包含两个前提（有时可附加一个存在假设，详见第三节）和一个结论的衍推关系。

2 代入法、演绎定理和前提代换

我们认为，构造关系三段论的一种简单方法是把包含二元谓词且实质上等同于一元谓词的量化表达式代入有效简单三段论格式的变项中，代入时要把同一个量化表达式代入三段论格式中的同一个变项。由于这些量化表达式等同于一元谓词，这样做等于把谓词代入有效三段论格式中的变项，所以会得到有效的三段论。举例说，设有经典 AAA-1 三段论格式：

(20) $\{\mathbf{every}(\mathbf{C}, \mathbf{B}), \mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{C})\} \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

把 **X**、$\mathbf{some}(\mathbf{Y}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{R})$ 和 $\mathbf{some}(\mathbf{Z}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{S})$ 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到下式：

(21) $\{\mathbf{every}(\mathbf{some}(\mathbf{Z}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{S}), \mathbf{some}(\mathbf{Y}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{R})), \mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{some}(\mathbf{Z}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{S}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{some}(\mathbf{Y}_{\mathbf{acc}}, \mathbf{R}))$

上式是有效的关系三段论格式，其中 **X**、**Y** 和 **Z** 是一元谓词变项，**R** 和 **S** 是二元谓词变项。把具体的词项代入上述格式，便可得到有效的关系三段论实例，例如把“男孩”、“歌”、“女孩”、“唱”和“爱”分别代入 **X**、**Y**、**Z**、**R** 和 **S**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(1) 每个爱一个女孩的（个体）都唱了一首歌，每个男孩都爱一个女孩，所以每个男孩都唱了一首歌。

在上例中，被代入的三段论（即 (20)）是仅包含经典量词的简单三段论，代入的量化表达式也只包含经典量词，所以得到的是仅包含经典量词的关系三段论。如要推导包含广义量词（这里指非经典量词）的关系三段论，我们可以在进行代入法时选取包含广义量词的简单三段论格式，或者包含广义量词的量化表达式。

举例说，设我们选取以下由 [12] 提出的有效数值三段论格式（在下式中，n 和 m 是大于 0 的整数）：

(22) $\{\textbf{all but at most n}(\mathbf{C},\mathbf{B}), \textbf{at least m}+\mathbf{n}(\mathbf{A},\mathbf{C})\} \Rightarrow \textbf{at least m}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

把 **X**、$\textbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R})$ 和 **Z** 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到下式：

(23) $\{\textbf{all but at most n}(\mathbf{Z}, \textbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R})), \textbf{at least m}+\mathbf{n}(\mathbf{X},\mathbf{Z})\}$
$\Rightarrow \textbf{at least m}(\mathbf{X}, \textbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R}))$

上式是包含数值量词的有效关系三段论格式，如把 3、2、“男孩”、“奖项”、“运动员”和“得到”分别代入 **m**、**n**、**X**、**Y**、**Z** 和 **R**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(2) 在运动员中，除了最多两人外，所有人都得到奖项，至少五名男孩是运动员，所以至少三名男孩得到奖项。

在构造关系三段论时，除使用代入法外，如能配合使用其他保持推理有效性的变换，将能大大扩阔所能构造关系三段论的范围。接下来介绍一种十分有用的变换，此即命题逻辑中的“演绎定理”（deduction theorem）。演绎定理的一般表示形式如下：

(24) 若 $\{\mathbf{p},\mathbf{q}\} \Rightarrow \mathbf{r}$，则 $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$。

上面的 $\{\mathbf{p},\mathbf{q}\} \Rightarrow \mathbf{r}$ 可被看成一个三段论，其中 **p** 和 **q** 是前提，**r** 是结论；$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ 则代表一个蕴涵式。上式告诉我们，可以将三段论变换成仅包含一个前提的推理，其前提是 **p**，其结论则是蕴涵式 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$。

举例说，设我们选取 AAA-1 三段论格式，并把 **X**、**R** 和 **Y** 分别代入该格式中的 **A**、**B** 和 **C**，从而得到下式：

(25) $\{\textbf{every}(\mathbf{Y},\mathbf{R}), \textbf{every}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\} \Rightarrow \textbf{every}(\mathbf{X},\mathbf{R})$

上述代入结果存在一些问题：由于 **R** 是二元谓词，上式中的 $\textbf{every}(\mathbf{Y},\mathbf{R})$ 和 $\textbf{every}(\mathbf{X},\mathbf{R})$ 实质上是一元谓词而非语句（因此 Y 和 X 应带有下标 **acc**），可是三论段通常应由语句组成。为补救这一问题，可以把这两个一元谓词改写成带有不受约束的个体变项 **x** 的开语句，即把上式改写成[3]：

(26) $\{\mathbf{x}(\textbf{every}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R})), \textbf{every}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\} \Rightarrow \mathbf{x}(\textbf{every}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}))$

接下来把上式的两个前提对调位置，然后利用演绎定理，可得到：

(27) $\textbf{every}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{x}(\textbf{every}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R})) \rightarrow \mathbf{x}(\textbf{every}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}))$

[3]请注意三段论格式（而非三段论实例）实质上也是由带有谓词变项的语句组成，这些语句在本质上也是开语句。

上式右端蕴涵式的意思是：如果 $\mathbf{x}$ 属于 $\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})$，则 $\mathbf{x}$ 属于 $\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})$。由于 $\mathbf{x}$ 是任意变项,这个蕴涵式也可看成表达一个全称量化句:凡是属于 $\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})$ 的都属于 $\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})$，因此可以把这个蕴涵式改写成一个以 **every** 作为量词的量化句，即把上式改写成：

(28) $\mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

这样我们便把一个三段论变换成仅包含一个前提的推理（这种推理称为“直接推理”），其前提是原三段论的某个前提，其结论则是一个以 every 作为量词的量化句。把具体的词项代入上述格式，便可得到有效的推理实例，例如把“马”、“动物”和“喜爱”分别代入 **X**、**Y** 和 **R**，便可得到以下推理实例：

(29) 所有马都是动物，所以每个喜爱所有动物的（个体）都喜爱所有马。

我们可以把上面推导 (28) 的过程总结成以下一般形式：

(30) 设 $\mathbf{Q_1}$、$\mathbf{Q_2}$、$\mathbf{Q_3}$ 为 $\langle 1, 1\rangle$ 型量词,**X**、**Y**、**Z** 和 **W** 为一元谓词,**R** 和 **S** 为二元谓词，**x** 为个体变项，则从三段论 $\{\mathbf{Q_1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{x}(\mathbf{Q_2}(\mathbf{Z_{acc}}, \mathbf{R}))\} \Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{Q_3}(\mathbf{W_{acc}}, \mathbf{S}))$，可以推出直接推理 $\mathbf{Q_1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{Q_2}(\mathbf{Z_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{Q_3}(\mathbf{W_{acc}}, \mathbf{S}))$。

以下我们把上述变换仍称作“演绎定理”，因为它是从命题逻辑中的演绎定理推导而来的。

利用演绎定理可以推导出有效的直接推理格式，但我们不必停留于此。由于这个直接推理的结论是一个全称量化句，如果把这个全称量化句与其他包含全称量化句的三段论格式结合，便可推导出关系三段论格式。举例说，我们可以把 (28) 与 [15] 提出的下列模糊三段论格式结合起来：

(31) $\{\mathbf{every}(\mathbf{C}, \mathbf{B}), \mathbf{almost\ all}(\mathbf{A}, \mathbf{C})\} \Rightarrow \mathbf{most}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

把 **Z**、$\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})$ 和 $\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})$ 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到：

$$\begin{aligned}(32)\ &\{\mathbf{every}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})), \mathbf{almost\ all}(\mathbf{Z}, \mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}))\}\\ &\quad \Rightarrow \mathbf{most}(\mathbf{Z}, \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))\end{aligned}$$

但上式中的第一个前提等同于 (28) 中的结论，因此可以用 (28) 中的前提取代上式中的第一个前提，由此可得以下有效关系三段论格式：

(33) $\{\mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{almost\ all}(\mathbf{Z}, \mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}))\} \Rightarrow \mathbf{most}(\mathbf{Z}, \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

上式是把 AAA-1 三段论和 (31) 中的模糊三段论结合起来的有效关系三段论，如把“马”、“动物”、“兽医”和“喜爱”分别代入 **X**、**Y**、**Z** 和 **R**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(3) 所有马都是动物，几乎所有兽医都喜爱所有动物，所以大多数兽医喜爱

所有马。

在推导上述关系三段论格式的过程中，我们运用了以下变换：当一个推理的某个前提等同于另一个推理的结论时，可以用后者的前提取代该前提，以下把这种十分有用的变换称为“前提代换”，并将其总结成以下一般形式：

(34) 设 $\mathbf{p_1}$、$\cdots$、$\mathbf{p_m}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r_1}$、$\cdots$、$\mathbf{r_n}$、$\mathbf{s}$ 为语句，则从 $\{\mathbf{p_1}, \ldots \mathbf{p_m}\} \Rightarrow \mathbf{q}$ 和 $\{\mathbf{q}, \mathbf{r_1}, \ldots \mathbf{r_n}\} \Rightarrow \mathbf{s}$，可以推出 $\{\mathbf{p_1}, \ldots \mathbf{p_m}, \mathbf{r_1}, \ldots \mathbf{r_n}\} \Rightarrow \mathbf{s}$。

3　引入存在假设

如前所述，利用演绎定理，可以推导出一个以全称量化句作为结论的直接推理。但其实我们不必限于以全称量化句 $\mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 作为结论，这是因为在引入适当的附加前提后，$\mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 蕴涵其他量化句，这样便可以其他量化句作为上述直接推理的结论，从而扩大上一节所述方法的适用范围。这些附加前提的特点是对 A 的基数作出规定，此即 [13] 所称的“存在假设”(existential assumption)。

在三段论研究中，存在假设并非新奇事物。在经典逻辑研究的 24 个有效三段论中，有 9 个便须依赖适当的存在假设才能成立（参见 [14]），例如以下的 AAI-3 三段论：

(35) $\{\mathbf{some}(\mathbf{C}, \mathbf{exist}), \mathbf{every}(\mathbf{C}, \mathbf{B}), \mathbf{every}(\mathbf{C}, \mathbf{A})\} \Rightarrow \mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

在上式中，$\mathbf{some}(\mathbf{C}, \mathbf{exist})$ 就是存在假设，其中 **exist** 代表“存在”，$\mathbf{some}(\mathbf{C}, \mathbf{exist})$ 代表存在个体具有 **C** 所述的性质[4]。从某一角度看，引入适当的存在假设可以扩大有效三段论的范围。

关系三段论的存在假设可分为两类，第一类存在假设表明论域中存在个体具有某谓词所述的性质，以下我们用一个实例来说明如何推导包含这类假设的关系三段论。设我们选取以下由 [9] 提出的有效模糊三段论格式：

(36) $\{\mathbf{almost\ all}(\mathbf{A}, \mathbf{C}), \mathbf{almost\ all}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\} \Rightarrow \mathbf{most}(\mathbf{C\ and\ A}, \mathbf{B})$

把 **X**、**R** 和 **Y** 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，并引入变项 **x**，可得到下式：

(37) $\{\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{x}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))\} \Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}}, \mathbf{R}))$

对上式利用演绎定理，可得到：

(38) $\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}}, \mathbf{R}))$

[4] 在广义量词理论下，存在句“有 **A** 存在”可以表示成 $\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{exist})$。这里 **exist** 是论域（用 U 来代表）中最宽泛的谓词，因为论域中的任何一个元素都是在该论域中存在的，因此 $\mathrm{exist} = U$。根据 **some** 的语义解释，可得 $\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{exist})$ 真当且仅当 $A \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$，即 A 非空，这正是“有 A 存在”所要表达的意思。

上式的结论是全称量化句，但我们可以从这个量化句推导出一个较弱的量化句，其原理是若假设论域中存在个体具有 **A** 所述的性质，便可以从 $\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 推导出 $\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{A},\mathbf{B})$，其中 **p** 代表 0 与 1 之间的任意分数。以下把上述推导过程总结成以下一般形式：

(39) $\{\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{exist}),\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})\}\Rightarrow\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

在上式中，$\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{exist})$ 是第一类存在假设，引入这个假设后，便可以从上式的第二个前提推出结论。现在把 $\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R})$ 和 $\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R})$ 分别代入上式中的 **A** 和 **B**，可得到：

(40) $\{\mathbf{some}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{exist}),\mathbf{every}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R}))\}\Rightarrow\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R}))$

由于上式的第二个前提等同于 (38) 的结论，所以可以进行前提代换，把上式和 (38) 结合成下式：

(41) $\{\mathbf{some}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{exist}),\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\}\Rightarrow\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R}))$

接着考虑以下由 [4] 提出的有效比例三段论格式（其中 **p** 和 **q** 是 0 与 1 之间的分数，而且 $p > q$）：

(42) $\{\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{C},\mathbf{A}),\mathbf{less\ than\ q}(\mathbf{C},\mathbf{B})\}\Rightarrow\mathbf{not\ every}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

把 $\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R})$、**Z** 和 $\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R})$ 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到下式：

(43) $\{\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R})),\mathbf{less\ than\ q}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{Z})\}\Rightarrow\mathbf{not\ every}(\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{Z})$

但上式中的第一个前提等同于 (41) 中的结论，所以可以进行前提代换，把上式变换成下式：

(44) $\{\mathbf{some}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{exist}),\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\mathbf{less\ than\ q}(\mathbf{almost\ all}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{Z})\}\Rightarrow\mathbf{not\ every}(\mathbf{most}(\mathbf{Y\ and\ X_{acc}},\mathbf{R}),\mathbf{Z})$

上式是结合 (36) 中模糊三段论和 (42) 中比例三段论且包含第一类存在假设的有效关系三段论，如把 $\frac{1}{2}$、“课程”、“必修”、“能够结业”和“报读了”分别代入 **q**、**X**、**Y**、**Z** 和 **R**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(4) 有人报读了几乎所有课程，几乎所有课程都是必修的，在报读了几乎所有课程的人中，少于一半能够结业，所以并非每个报读了大多数必修课程的人都能够结业。

第二类存在假设表明论域中有多少个体具有某谓词所述的性质，以下我们用一个实例来说明如何推导包含这类假设的关系三段论。设我们选取 AAA-1 三段论格式，并把 **X**、**R** 和 **Y** 分别代入该格式中的 **A**、**B** 和 **C**，并引入变项 **x**，从而得到下式：

(45) $\{\mathbf{x}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})), \mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\} \Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

对上式利用演绎定理，可得到：

(46) $\mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

上式的结论是全称量化句，但我们可以从这个量化句推导出一个数值量化句，其原理是若假设论域中存在至少 n 个个体具有 A 所述的性质，便可以从 $\mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 推导出 $\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$，其中 **n** 代表大于 0 的任意整数。以下把上述推导过程总结成以下一般形式：

(47) $\{\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A}, \mathbf{exist}), \mathbf{every}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\} \Rightarrow \mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

在上式中，$\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A}, \mathbf{exist})$ 是第二类存在假设，引入这个假设后，便可以从上式的第二个前提推出结论。现在把 $\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})$ 和 $\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})$ 分别代入上式中的 **A** 和 **B** 并把上式中的 n 改为 $m + n$，可得到：

(48) $\{\mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{exist}), \mathbf{every}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

由于上式的第二个前提等同于 (46) 的结论，所以可以进行前提代换，把上式和 (46) 结合成下式：

(49) $\{\mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{exist}), \mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\}$
$\Rightarrow \mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))$

接着考虑以下由 [12] 提出的数值三段论格式（等同于 (22)）：

(50) $\{\mathbf{all\ but\ at\ most\ n}(\mathbf{C}, \mathbf{B}), \mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{C})\} \Rightarrow \mathbf{at\ least\ m}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

把 $\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R})$、**Z** 和 $\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R})$ 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到下式：

(51) $\{\mathbf{all\ but\ at\ most\ n}(\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{Z}), \mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}),$
$\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}))\} \Rightarrow \mathbf{at\ least\ m}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{Z})$

但上式中的第二个前提等同于 (49) 中的结论，所以可以进行前提代换，把上式变换成下式：

(52) $\{\mathbf{all\ but\ at\ most\ n}(\mathbf{every}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{Z}), \mathbf{at\ least\ m} + \mathbf{n}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{exist}),$
$\mathbf{every}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\} \Rightarrow \mathbf{at\ least\ m}(\mathbf{every}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}), \mathbf{Z})$

上式是结合 AAA-1 三段论和 (50) 中数值三段论且包含第二类存在假设的有效关系三段论，如把 3、2、“必修课程”、“课程”、“能够结业”和“报读了”分别代入 **m**、**n**、**X**、**Y**、**Z** 和 **R**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(5) 在报读了所有必修课程的人中，除了最多两人外，所有人都能够结业，至少有五人报读了所有课程，所有必修课程都是课程，所以至少有三个报读了所有课程的人能够结业。

4 表达比较形容词的二元谓词

上面讨论的关系三段论都包含一般二元谓词，这些谓词没有特殊的性质，可用来表达自然语言中的一般及物动词。在某些情况下，如果规定二元谓词具备某些特殊性质，便可用来表达自然语言中的某些特殊词项，并研究包含这些词项的关系三段论。在本节，我们将研究能表达比较形容词（例如英语的“taller than”、“as tall as”等）的二元谓词，这里首先介绍这类二元谓词的定义。

我们假设每个可作比较的形容词（用 **R** 来代表）均派生出三个二元谓词：$\mathbf{R}^{>}$、$\mathbf{R}^{<}$ 和 $\mathbf{R}^{=}$，其中 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{y})$、$\mathbf{R}^{<}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 和 $\mathbf{R}^{=}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 分别代表“x 比 y 较为 R”、“y 比 x 较为 R”和“x 与 y 一样 R”。此外，我们还用 $\mathbf{R}^{\#}$ 来统称 $\mathbf{R}^{>}$、$\mathbf{R}^{<}$ 和 $\mathbf{R}^{=}$ 中的任何一个，即以 # 代表 $\{>,<,=\}$ 中的任意一员。鉴于比较关系是双向的 (例如若 x 比 y 高，则 y 比 x 矮)，我们假设上述二元谓词满足以下等价关系：

(53) 对任意个体 **x**、**y**，均有

(i) $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{<}(\mathbf{y},\mathbf{x})$

(ii) $\mathbf{R}^{<}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{>}(\mathbf{y},\mathbf{x})$

(iii) $\mathbf{R}^{=}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R}^{=}(\mathbf{y},\mathbf{x})$

此外，我们还假设上述二元谓词满足以下性质：

(54) **三分律**（trichotomy）：设 **x** 和 **y** 为任意个体，则在以下语句中有且只有一个成立：$\{\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{R}^{<}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{R}^{=}(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$。

(55) **自反性**（reflexivity）：对任意个体 **x**，均有 $\mathbf{R}^{=}(\mathbf{x},\mathbf{x})$。

(56) **传递性**（transitivity）：对任意个体 **x**、**y**、**z**，均有

(i) $\{\mathbf{R}^{\#}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{R}^{\#}(\mathbf{y},\mathbf{z})\} \Rightarrow \mathbf{R}^{\#}(\mathbf{x},\mathbf{z})$

(ii) $\{\mathbf{R}^{=}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{R}^{\#}(\mathbf{y},\mathbf{z})\} \Rightarrow \mathbf{R}^{\#}(\mathbf{x},\mathbf{z})$

从上述性质可以推导出其他性质，例如从 (54) 和 (55) 可以推出，对任意个体 **x**，均非 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{x})$；从 (54) 可以推出，对任意个体 **x**、**y**，若 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{y})$，则必非 $\mathbf{R}^{<}(\mathbf{x},\mathbf{y})$；

从 (54) 和 (56) 可以推出，对任意个体 **x**、**y**、**z**，若非 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 且非 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{y},\mathbf{z})$，则必非 $\mathbf{R}^{>}(\mathbf{x},\mathbf{z})$。[5]

根据上述定义，可以推导出与比较形容词相关的定理，以下是下文将要用到的定理，其证明载于下文第六节：

定理 1. 设 $\mathbf{Q_1}$ 和 $\mathbf{Q_2}$ 为下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**x** 为个体变项，**A** 为一元谓词，$\mathbf{R}^{\#}$ 为如上面定义的二元谓词，则 $\mathbf{x}(\mathbf{Q_1}(\mathbf{Q_2}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{\#})_{\mathbf{acc}},\mathbf{R}^{\#})) \Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{Q_2}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))$。[6]

上述定理提到量词的"下界性"(lower boundedness)和"右递增性"(right increasing monotonicity)这两个概念，其定义如下：

(57) 设 **Q** 为 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**Q** 是下界的当且仅当若 $\mathbf{Q}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 真，则 $|A\cap B|\geq 1$。

(58) 设 **Q** 为 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**Q** 是右递增的当且仅当对任意一元谓词 **A**、**B**、**C**，若 $B\subseteq C$，则有 $\mathbf{Q}(\mathbf{A},\mathbf{B})\Rightarrow\mathbf{Q}(\mathbf{A},\mathbf{C})$。

根据量词的语义解释，容易证明 **some**、**most**、**at least n**、**more than n** 等是下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词（可见于广义量词理论的文献）。

接着看如何运用上述定理推导关系三段论。设我们选取经典 IAI-3 三段论格式：

(59) $\{\mathbf{some}(\mathbf{C},\mathbf{B}),\mathbf{every}(\mathbf{C},\mathbf{A})\}\Rightarrow\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

把 $\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#})$、$\mathbf{R}^{\#}$ 和 **Y** 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，并引入变项 **x**，可得到下式：

(60) $\{\mathbf{x}(\mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R}^{\#})),\mathbf{every}(\mathbf{Y},\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))\}\Rightarrow\mathbf{x}(\mathbf{some}(\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#})_{\mathbf{acc}},\mathbf{R}^{\#}))$

由于 **some** 和 **most** 是下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，因此从定理 1，可得：

(61) $\mathbf{x}(\mathbf{some}(\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#})_{\mathbf{acc}},\mathbf{R}^{\#}))\Rightarrow\mathbf{x}(\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))$

上式的前提等同于 (60) 的结论，因此可以进行前提代换，把上式和 (60) 结合成下式：

(62) $\{\mathbf{x}(\mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R}^{\#})),\mathbf{every}(\mathbf{Y},\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))\}\Rightarrow\mathbf{x}(\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))$

对上式利用演绎定理，可得到：

(63) $\mathbf{every}(\mathbf{Y},\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))\Rightarrow\mathbf{every}(\mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}},\mathbf{R}^{\#}),\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}},\mathbf{R}^{\#}))$

接着考虑以下经典 AII-1 三段论格式：

(64) $\{\mathbf{every}(\mathbf{C},\mathbf{B}),\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{C})\}\Rightarrow\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

[5] 上述三种性质分别相当于 [11] 所称的"非自反性"、[8] 所称的"非对称性"和 [8] 所称的"反传递性"，因此本节的讨论也适用于 [8] 和 [11] 研究的包含比较形容词的关系三段论。

[6] 以下提供这个衍推关系的一个实例，把 **some**、**most**、**boy** 和 **be taller than** 分别代入 $\mathbf{Q_1}$、$\mathbf{Q_2}$、**A** 和 $\mathbf{R}^{\#}$，可得到以下推理实例（译成汉语）："x 高过（至少）一个高过大多数男孩的（个体），所以 x 高过大多数男孩"。

把 $\mathbf{Z}$、$\mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})$ 和 $\mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})$ 分别代入上式中的 **A**、**B** 和 **C**，可得到：

(65) $\{\mathbf{every}(\mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}), \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})), \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))$

但上式中的第一个前提等同于 (63) 中的结论，所以可以进行前提代换，把上式变换成下式：

(66) $\{\mathbf{every}(\mathbf{Y}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})), \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))$

上式是结合 IAI-3 和 AII-1 三段论的关系三段论格式，虽然这两者都是经典三段论，但由于我们运用了定理 1，所以可以把非经典量词 **most** 引入到上述格式中。把具体的词项代入上述格式，便可得到有效的关系三段论实例，如把“骑师”、“篮球员”、“游泳选手”和“比……高”分别代入 **X**、**Y**、**Z** 和 $\mathbf{R}^{\#}$，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(6) 每个篮球员都比大多数骑师高，有游泳选手比（至少）一个篮球员高，所以有游泳选手比大多数骑师高。

请注意如果把上例中的“比…高”改为“与……一样高”，上述推理仍然成立；但若把“比……高”改为“看见”，则上述推理不成立，这是因为“看见”并非具有前述性质的比较形容词。

5 等价变换

当代广义量词理论研究了量化句之间的多种等价关系，我们可以利用这些关系把某一关系三段论格式中的语句变换成等价语句，从而获得更多有效关系三段论格式。举例说，根据 [7] 的定理 5，由于 **every** 与 **no** 互为“后补运算”（postcomplement），而 **most** 与 **at most** $\frac{1}{2}$ 互为“补运算”（complement）（请参阅 [7] 对这两个概念的定义），以下等价关系成立：

(67) $\mathbf{every}(\mathbf{Y}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})) \Leftrightarrow \mathbf{no}(\mathbf{Y}, \mathbf{at\ most}\ \tfrac{1}{2}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))$

由于有上述等价关系，我们可以用上式右端的量化句来替换 (66) 中的第一个前提，从而得到以下有效关系三段论格式：

(68) $\{\mathbf{no}(\mathbf{Y}, \mathbf{at\ most}\ \tfrac{1}{2}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#})), \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{\#}))$

量化句之间的各种等价关系，详见当代广义量词理论的文献，本文无意一一介绍，这里只拟提出一个适用于比较形容词的等价关系。根据 [1] 的事实 2，若 **Q**

为右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**A**、**B** 为一元谓词，**R** 为二元谓词，则以下洐推关系成立：

(69) $\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R})) \Rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{B}, \mathbf{some}(\mathbf{A_{acc}}, \mathbf{R^{conv}}))$

(70) $\mathbf{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{every}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R})) \Rightarrow \mathbf{every}(\mathbf{B}, \mathbf{Q}(\mathbf{A_{acc}}, \mathbf{R^{conv}}))$

在以上两式中，$\mathbf{R^{conv}}$ 代表 **R** 的“逆向反义词”（converse），其定义如下：

(71) 对任意个体 **x**、**y**，$\mathbf{R^{conv}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$。

例如若 **R** 代表“看见”，则 $\mathbf{R^{conv}}$ 代表“被看见”。把上述定义应用于 (53) 中的等价关系，可得：

(72) (i) $(\mathbf{R}^{>})^{\mathbf{conv}} = \mathbf{R}^{<}$
(ii) $(\mathbf{R}^{<})^{\mathbf{conv}} = \mathbf{R}^{>}$
(iii) $(\mathbf{R}^{=})^{\mathbf{conv}} = \mathbf{R}^{=}$

衍推关系 (69) 和 (70) 适用于所有二元关系 **R**。有趣的是，当把这个 **R** 换成 $\mathbf{R}^{>}$ 或 $\mathbf{R}^{<}$（并再加上一些限制条件）后，这两个衍推关系便会变成等价关系：

定理 2. 设 **Q** 为下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**A** 和 **B** 为一元谓词且 **B** 非空，$\mathbf{R}^{>}$ 和 $\mathbf{R}^{<}$ 为如上面定义的二元谓词，则

(i) $\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R}^{>})) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{B}, \mathbf{some}(\mathbf{A_{acc}}, \mathbf{R}^{<}))$

(ii) $\mathbf{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{every}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R}^{>})) \Leftrightarrow \mathbf{every}(\mathbf{B}, \mathbf{Q}(\mathbf{A_{acc}}, \mathbf{R}^{<}))$

上列两式中的 $\mathbf{R}^{>}$ 和 $\mathbf{R}^{<}$ 如对调位置，等价关系仍然成立。

把具体的量词代入上述定理，便可得到一些等价关系。举例说，由于 **most** 为下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，根据定理 2(i)，若 X 非空，以下等价关系成立：

(73) $\mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{>})) \Leftrightarrow \mathbf{most}(\mathbf{X}, \mathbf{some}(\mathbf{Z_{acc}}, \mathbf{R}^{<}))$

由于有上述等价关系，我们可以用上式右端的量化句来替换 (66) 中的结论，并把 (66) 中的 $\mathbf{R}^{\#}$ 改为 $\mathbf{R}^{>}$，从而得到以下有效关系三段论格式（下式带有存在假设 $\mathbf{some}(\mathbf{X}, \mathbf{exist})$，是用以满足定理 2 对非空集合的要求）：

(74) $\{\mathbf{some}(\mathbf{X}, \mathbf{exist}), \mathbf{every}(\mathbf{Y}, \mathbf{most}(\mathbf{X_{acc}}, \mathbf{R}^{>})), \mathbf{some}(\mathbf{Z}, \mathbf{some}(\mathbf{Y_{acc}}, \mathbf{R}^{>}))\}$
$\Rightarrow \mathbf{most}(\mathbf{X}, \mathbf{some}(\mathbf{Z_{acc}}, \mathbf{R}^{<}))$

如把“骑师”、“篮球员”、“游泳选手”和“高”分别代入 **X**、**Y**、**Z** 和 **R**，便可得到第一节提过的以下推理实例：

(7) 存在至少一个骑师，每个篮球员都比大多数骑师高，有游泳选手比（至少）一个篮球员高，所以大多数骑师比（至少）一个游泳选手矮。

6 本文介绍方法的有效性

前面各节介绍了推导关系三段论格式的方法，此方法包含以下元素：有效简单三段论格式、代入法、演绎定理、前提代换、引入存在假设、定理 1、等价变换和定理 2。为确保本文所介绍方法能推出有效的关系三段论格式，必须确保上述每项元素本身都是有效推理，即都能从真的前提推出真的结论。

在前述各项元素中，简单三段论格式的有效性是经典三段论和各种非经典三段论（包括数值三段论、比例三段论、模糊三段论等）学者研究的课题，它们的有效性已由有关学者证明，本文不拟重复。

其次考虑代入法。代入法的本质就是把有效三段论格式中的谓词换成其他谓词，由于三段论格式中的谓词相当于变项，只要在代入时把相同的谓词代入相同的变项，并且对代入结果作必要的调整（例如加上下标 **acc** 和个体变项 **x**，使代入结果从一元谓词变成开语句），所得结果仍是有效的三段论格式。请注意把一元谓词变成开语句并没有改变一元谓词的本质，这是因为一元谓词与开语句存在相通之处：两者都可被看成把个体映像为真值的函数。

接着考虑演绎定理和前提代换。在第二节，我们详细解释了演绎定理 (30) 和前提代换 (34) 的理据。概言之，(30) 的有效性源自命题逻辑中演绎定理 (24) 的有效性；而 (34) 本身也是命题逻辑中的一个推理结果。由于上述定理和推理的证明可在一般的数理逻辑教科书中找到，本文不拟重复这些证明。

接着考虑存在假设。本文介绍了两类存在假设，第一类存在假设表明论域中存在个体具有某谓词所述的性质。通过引入这类假设，可以从一个全称量化句推导出一个包含比例量词 **more than p** 的语句（其中 **p** 是 0 与 1 之间的任意分数），其理据是以下推理的有效性：

(39) $\{\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{exist}),\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})\}\Rightarrow\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

现在证明上述推理的有效性。根据广义量词理论对上式中量词的语义解释，$\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{exist})$ 和 $\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 真当且仅当 $A\neq\emptyset$ 并且 $A\subseteq B$。从这两式可得 $|A\cap B|/|A|=|A|/|A|=1>p$。另一方面，$\mathbf{more\ than\ p}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 真当且仅当 $|A\cap B|/|A|>p$。由此可见，上述推理的前提若真，其结论必真，因此是有效推理。

第二类存在假设表明论域中有多少个体具有某谓词所述的性质。通过引入这类假设，可以从一个全称量化句推导出一个包含数值量词 **at least n** 的语句（其中 **n** 是大于 0 的任意整数），其理据是以下推理的有效性：

(47) $\{\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A},\mathbf{exist}),\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})\}\Rightarrow\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A},\mathbf{B})$

现在证明上述推理的有效性。根据广义量词理论对上式中量词的语义解释，$\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A},\mathbf{exist})$ 和 $\mathbf{every}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 真当且仅当 $|A|\geq n$ 并且 $A\subseteq B$。从这两式可得 $|A\cap B|=|A|\geq n$。另一方面，$\mathbf{at\ least\ n}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 真当且仅当 $|A\cap B|\geq n$。由此可见，上述推

理的前提若真，其结论必真，因此是有效推理。

接着考虑定理 1。为证明此定理，首先引入广义量词理论中“见证集”（witness set）的概念，其定义如下：

(75) 设 **Q** 为 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**A** 为一元谓词，则 **W** 是 **Q**(**A**) 的见证集当且仅当 $W \subseteq A$ 并且 $Q(A,W)$ 真。

[2] 证明了与见证集相关的下列事实：

(76) 设 **Q** 为右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**A** 和 **B** 为一元谓词，则 **Q**(**A**, **B**) 真当且仅当存在 **Q**(**A**) 的一个见证集 W 使得 $W \subseteq B$。

此外，我们还可以推导出以下事实：

(77) 设 **Q** 为下界 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**A** 为一元谓词，则 **Q**(**A**) 的见证集必非空集。

上述事实的理据是，如果 **Q**(**A**) 的见证集是空集（$\emptyset$），那么从 (75) 可知 $Q(A,\emptyset)$ 真；但另一方面，由于 **Q** 是下界量词，根据 (57)，若 $Q(A,\emptyset)$ 真，则 $|A\cap\emptyset| \geq 1$，但这是不可能的。

现在证明定理 1（重列于下）。

定理 1. 设 $\mathbf{Q_1}$ 和 $\mathbf{Q_2}$ 为下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，**x** 为个体变项，**A** 为一元谓词，$\mathbf{R^\#}$ 为如上面定义的二元谓词，则 $\mathbf{x(Q_1(Q_2(A_{acc}, R^\#)_{acc}, R^\#))} \Rightarrow \mathbf{x(Q_2(A_{acc}, R^\#))}$。

证明. 设前提 $\mathbf{x(Q_1(Q_2(A_{acc}, R^\#)_{acc}, R^\#))}$ 真，根据 (15)，这即是说 $x \in \{x : Q_1(\{z : Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\})\}, \{y : R^\#(x,y)\})\}$ 真，亦即 $Q_1(\{z : Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\})\}, \{y : R^\#(x,y)\})$ 真。由于 $\mathbf{Q_1}$ 是右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，根据 (75) 和 (76)，可知存在见证集 W 使得 $W \subseteq \{z : Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\})\}$ 并且 $W \subseteq \{y : R^\#(x,y)\}$。由于 $\mathbf{Q_1}$ 是下界量词，根据 (77)，W 非空，故必有 W 的一个元素 z 使得 $Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\})$ 和 $R^\#(x,z)$ 皆真。另外，根据 (56)(i)，对任何 w，均有 $\{R^\#(x,z), R^\#(z,w)\} \Rightarrow R^\#(x,w)$。由此根据命题逻辑中的演绎定理，可得

(78) $R^\#(x,z) \Rightarrow w \in \{w : R^\#(z,w)\} \to w \in \{w : R^\#(x,w)\}$

但由于 w 是任意个体变项，上式右端的蕴涵式实质上表达集合包含关系，即

(79) $R^\#(x,z) \Rightarrow \{w : R^\#(z,w)\} \subseteq \{w : R^\#(x,w)\}$

由于上面已证得 $R^\#(x,z)$ 真，根据上式以及 $\mathbf{Q_2}$ 的右递增性，可得

(80) $Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\}) \Rightarrow Q_2(A, \{w : R^\#(x,w)\})$

但又由于上面已证得 $Q_2(A, \{w : R^\#(z,w)\})$ 真，从上式可知 $Q_2(A, \{w : R^\#(x,w)\})$ 真，即 $x \in \{x : Q_2(A, \{w : R^\#(x,w)\})\}$ 真。根据 (15)，这即是说 $\mathbf{x(Q_2(A_{acc}, R^\#))}$ 真，定理 1 证毕。 □

接着考虑等价变换。等价变换的原理是命题逻辑中的基本原理：把一个有效推理中的前提或结论换成等价语句，所得结果仍是有效推理。本文第五节也讨论了一些等价关系，包括 (67) 和定理 2，其中 (67) 是广义量词理论的研究成果，其证明可见于相关文献。

以下要证明定理 2。为证明此定理，须先证明以下引理。

引理 1. 设 $\mathbf{R}^{>}$ 和 $\mathbf{R}^{<}$ 为如上面定义的二元谓词，A 为非空集合，则

(i) A 中有元素 x，使得对 A 中所有元素 z，均有 $R^{>}(x,z)$ 或 $R^{=}(x,z)$；并且

(ii) A 中有元素 y，使得对 A 中所有元素 z，均有 $R^{<}(y,z)$ 或 $R^{=}(y,z)$。

证明. 以下仅证明 (i)，(ii) 的证明方法类似。我们对 $|A|$ 进行归纳，首先假设 $|A|=1$ 且 $A=\{x\}$。根据 (55)，$R^{=}(x,x)$。由于 x 是 A 中唯一元素，故对 A 中所有元素 z，有 $R^{=}(x,z)$，即 (i) 在 $|A|=1$ 的情况下成立。其次假设 (i) 在 $|A|=n$ 的情况下成立，现考虑 $|A|=n+1$ 的情况。从 A 中任意选取元素 x，并定义 $A'=A–\{x\}$，由此得 $|A'|=n$。根据归纳假设，A' 中必有元素 y，使得对 A' 中所有元素 z，均有 $R^{>}(y,z)$ 或 $R^{=}(y,z)$。现在考虑 x 和 y。根据 (54)，有且只有以下三种情况之一成立：(a) $R^{>}(x,y)$；(b) $R^{<}(x,y)$；(c) $R^{=}(x,y)$。在情况 (a) 下，根据 (56) 和上述按归纳假设所得的结论，我们找到 A 中元素 x，使得对 A 中所有元素 z，均有 $R^{>}(x,z)$ 或 $R^{=}(x,z)$，即 (i) 在 $|A|=n+1$ 的情况下成立。在情况 (b) 和 (c) 下，我们亦找到 A 中元素 y，使得对 A 中所有元素 z，均有 $R^{>}(y,z)$ 或 $R^{=}(y,z)$，即 (i) 在 $|A|=n+1$ 的情况下也成立。根据数学归纳法原理，(i) 对任意非空集合 A 均成立，引理证毕。 □

现在证明定理 2（重列于下）：

定理 2. 设 $\mathbf{Q}$ 为下界右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为一元谓词且 $\mathbf{B}$ 非空，$\mathbf{R}^{>}$ 和 $\mathbf{R}^{<}$ 为如上面定义的二元谓词，则

(i) $\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{Q}(\mathbf{B_{acc}},\mathbf{R}^{>}))\Leftrightarrow\mathbf{Q}(\mathbf{B},\mathbf{some}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{<}))$

(ii) $\mathbf{Q}(\mathbf{A},\mathbf{every}(\mathbf{B_{acc}},\mathbf{R}^{>}))\Leftrightarrow\mathbf{every}(\mathbf{B},\mathbf{Q}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{<}))$

上列两式中的 $\mathbf{R}^{>}$ 和 $\mathbf{R}^{<}$ 如对调位置，等价关系仍然成立。

证明. 由于 [1] 已证明上述两个等价关系的一半（即 (69) 和 (70)），所以只需证明上述关系的另一半，即以下衍推关系：

(81) $\mathbf{Q}(\mathbf{B},\mathbf{some}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{<}))\Rightarrow\mathbf{some}(\mathbf{A},\mathbf{Q}(\mathbf{B_{acc}},\mathbf{R}^{>}))$

(82) $\mathbf{every}(\mathbf{B},\mathbf{Q}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{<}))\Rightarrow\mathbf{Q}(\mathbf{A},\mathbf{every}(\mathbf{B_{acc}},\mathbf{R}^{>}))$

(i) 设前提 $\mathbf{Q}(\mathbf{B},\mathbf{some}(\mathbf{A_{acc}},\mathbf{R}^{<}))$ 真。由于 $\mathbf{Q}$ 是右递增 $\langle 1,1\rangle$ 型量词，根据 (75) 和 (76)，可知存在见证集 W 使得

(83) $Q(B, W)$ 真

并且 $W \subseteq \text{some}(A_{acc}, R^{<})$，根据 (15)，此即

(84) $W \subseteq \{x : \text{some}(A, \{y : R^{<}(x, y)\})\}$

另外，由于 **Q** 是下界量词，根据 (77)，W 非空。由此根据引理 1，W 中有元素 b，使得

(85) 对 W 中所有元素 w，均有 $R^{>}(b, w)$ 或 $R^{=}(b, w)$ 真

由于 b 是 W 的元素，它必是 (84) 右端集合的元素，即 $\text{some}(A, \{y : R^{<}(b, y)\})$ 真。根据 **some** 的语义解释，必有 A 中元素 a，使得 $R^{<}(b, a)$ 真，亦即 $R^{>}(a, b)$ 真。由此和 (85)，根据 (56)，可知对 W 中所有元素 w，均有 $R^{>}(a, w)$ 真，即 $W \subseteq \{w : R^{>}(a, w)\}$。由于 **Q** 是右递增的，由此和 (83)，可得 $Q(B, \{w : R^{>}(a, w)\})$ 真，这即是说 $a \in \{z : Q(B, \{w : R^{>}(z, w)\})\}$。但因 $a \in A$，由此可知 $\text{some}(A, \{z : Q(B, \{w : R^{>}(z, w)\})\})$ 真。根据 (15)，这即是说 $\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R^{>}}))$ 真，(i) 证毕。
(ii) 设前提 $\mathbf{every}(\mathbf{B}, \mathbf{Q}(\mathbf{A_{acc}}, \mathbf{R^{<}}))$ 真。根据 **every** 的语义解释，有 $B \subseteq Q(A_{acc}, R^{<})$，根据 (15)，此即

(86) $B \subseteq \{x : Q(A, \{y : R^{<}(x, y)\})\}$

由于 B 非空，根据引理 1，B 中有元素 b，使得

(87) 对 B 中所有元素 w，均有 $R^{>}(b, w)$ 或 $R^{=}(b, w)$ 真

由于 b 是 B 的元素，它必是 (86) 右端集合的元素，即 $Q(A, \{y : R^{<}(b, y)\})$ 真。另外，由于 **Q** 是右递增 $\langle 1, 1\rangle$ 型量词，根据 (75) 和 (76)，可知存在见证集 W 使得

(88) $Q(A, W)$ 真

并且

(89) $W \subseteq \{y : R^{<}(b, y)\}$

这即是说对 W 中所有元素 y，均有 $R^{<}(b, y)$ 真，亦即 $R^{>}(y, b)$ 真。由此和 (87)，根据 (56)，可知 W 中每个元素 y 对 B 中所有元素 w，均有 $R^{>}(y, w)$ 真，即 $W \subseteq \{y : \text{every}(B, \{w : R^{>}(y, w)\})\}$。由于 **Q** 是右递增的，由此和 (88)，可得 $Q(A, \{y : \text{every}(B, \{w : R^{>}(y, w)\})\})$ 真。根据 (15)，这即是说 $\mathbf{Q}(\mathbf{A}, \text{every}(\mathbf{B_{acc}}, \mathbf{R^{>}}))$ 真，(ii) 证毕。

在以上证明中，$R^{>}$ 和 $R^{<}$ 的角色可以互相对调，由此可知 (i) 和 (ii) 两式中的 $\mathbf{R^{>}}$ 和 $\mathbf{R^{<}}$ 如对调位置，等价关系仍然成立，定理 2 证毕。 □

7　总结

本文介绍了推导有效关系三段论的方法，也证明了此方法的有效性。把本文介绍的方法应用于有效的简单三段论格式，所得结果必为有效的关系三段论格式。

一个相关问题是，能否使用本文介绍的方法推导出所有有效关系三段论格式？

由于本文介绍的方法须应用简单三段论格式，如要使用此方法推导出所有包含广义量词的关系三段论，须先确定所有包含广义量词的有效简单三段论格式。但广义量词多种多样，并非每一种都经学者充分研究，本文也只提到其中几种非经典量词（包括数值量词、比例量词、模糊量词）的三段论格式，而对这几种非经典量词三段论的研究还不算多，跟经典三段论不可同日而语。因此，还有很多包含广义量词（包括本文没有提到的广义量词类别）的有效简单三段论格式未被发现。

此外，本文的研究也说明了，如对关系三段论中所包含的二元谓词加入一些附加条件（例如比较形容词所满足的条件），可得到更多推理结果（例如定理 1 和定理 2），从而推导出更多有效关系三段论格式。可是，本文只是初步探讨了加入这些附加条件的一些可行方法并初步提出一些推理结果，还未充分展开这方面的研究，很多可行的附加条件和相关的推理结果尚待学者去发掘，因此本文介绍的方法虽未能穷尽所有有效关系三段论，但为研究包含广义量词的关系三段论提供了一个开端，提供了进一步研究的方向。

尽管如此，本文介绍的方法有很强的推导能力，能够推导出学者此前提出的绝大多数涉及二元谓词的有效关系三段论格式[7]。另外，虽然本文只讨论了二元谓词，但不难把本文介绍的方法推广应用于三元或甚至更高元谓词，并推导出 [13] 和 [22] 讨论过的涉及三元谓词的有效关系三段论，其方法如下：先对某个简单三段论格式进行适当代入，其中至少有一个代入项包含三元谓词，而包含这个三元谓词的语句实质上等于一个二元谓词。接着引入不受约束的个体变项 **x** 和 **y**，把上述语句改写成包含 x 和 y 的开语句（由于三元谓词有三个论元，除了代表直接宾语的下标 **acc** 外，还要使用代表间接宾语的下标 **dat**)。举例说，设 Z 和 R 分别是一元和三元谓词，那么 $\mathbf{every}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ 实质上是一个二元谓词，例如如果把 Z 和 R 分别理解为“男孩”和“告诉”，那么 $\mathbf{every}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ 便代表“告诉每名男孩”，这是一个包含两个论元（告诉者和被告诉的信息）的二元谓词。引入个体变项 x 和 y 后，便可以把这个二元谓词改写成以下开语句：

(90) $\mathbf{x}(\mathbf{y}_{\mathbf{acc}}(\mathbf{every}(\mathbf{Z}_{\mathbf{dat}}, \mathbf{R})))$

上式代表“x 把 y 告诉每名男孩”。从以上讨论可见，本文前面介绍的概念和方法也适用于三元谓词，只不过由于三元谓词有三个论元，推导包含三元谓词的有效

[7]我们曾运用本文介绍的方法，推导出 [3, 8, 10, 11, 13, 15, 20–23] 中提到的所有有效关系三段论格式 (包括某些被归入公理或推理规则的关系三段论格式)，其中某些推导要使用前提代换以外的命题逻辑原理以及与比较形容词有关的其他定理，但所用方法仍是本文介绍的基本方法。[17] 研究了 Hamilton 三段论，这种三段论实质上是以等词作为二元谓词的关系三段论；[18] 则在其关系三段论推理系统中加入了一种形如 $\mathbf{if}(\mathbf{some}(\mathbf{A}, \mathbf{exist}), \mathbf{some}(\mathbf{B}, \mathbf{exist}))$ 的蕴涵句，本文的研究并不涵盖包含上述等词和蕴涵句的关系三段论。

关系三段论的程序会较为繁复，而且要对前面介绍过的某些定理作适当调整。

最后，本文推导有效关系三段论的方法是基于一种贴近自然语言表层结构的形式表达式，在推导的过程中无需把表达式转化为逻辑公式或集合论公式 (只有在证明定理 1 和定理 2 时才须作这种转化)，这正是当今某些形式语义学者所称的“自然逻辑”（Natural Logic）研究路向（详见 [24] 的说明）。本文的研究说明了利用自然逻辑的研究路向，可以发掘出自然语言中很多复杂句（这里指包含宾语或复杂主语的语句）的推理。总括而言，本文对关系三段论和自然逻辑的研究作出了一定贡献。

参考文献

[1] A. Altman, Y. Peterzil and Y. Winter, 2005, “Scope dominance with upward monotone quantifiers”, *Journal of Logic, Language and Information*, **14(4)**: 445–455.

[2] J. Barwise and R. Cooper, 1981, “Generalized quantifiers and natural language”, *Linguistics and Philosophy*, **4(2)**: 159–219.

[3] N. Ivanov and D. Vakarelov, 2012, “A system of relational syllogistic incorporating full boolean reasoning”, *Journal of Logic and Computation*, **21(4)**: 433–459.

[4] F. Johnson, 1994, “Syllogisms with fractional quantifiers”, *Journal of Philosophical Logic*, **23(4)**: 401–422.

[5] E. L. Keenan, 1987, “Semantic case theory”, in J. Groenendijk *et al.* (eds.), *Proceedings of the Sixth Amsterdam Colloquium*, pp. 109–132, Amsterdam: ITLI.

[6] E. L. Keenan, 2002, “Some properties of natural language quantifiers: Generalized quantifier theory”, *Linguistics and Philosophy*, **(25)**: 627–654.

[7] E. L. Keenan, 2003, “Excursions in natural logic”, in C. Casadio *et al.* (eds.), *Language and Grammar: Studies in Mathematical Linguistics and Natural Language*, pp. 31–52, Stanford: CSLI Publications.

[8] G. Keene, 1969, *The Relational Syllogism: A Systemic Approach to Relational Logic*, Exeter: University of Exeter Press.

[9] M. Khayata, D. Pacholczyk and L. Garcia, 2002, “A qualitative approach to syllogistic reasoning”, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **(34)**: 131–159.

[10] L. Moss, 2010, “Syllogistic logics with verbs”, *Journal of Logic and Computation*, **20(4)**: 947–967.

[11] L. Moss, 2011, “Syllogistic logic with comparative adjectives”, *Journal of Logic, Language and Information*, **20(3)**: 397–417.

[12] W. Murphree, 1991, *Numerically Exceptive Logic: A Reduction of the Classical Syllogism*, New York: Peter Lang Publishing Inc.

[13] W. Murphree, 1998, “Numerical term logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **39(3)**: 346–362.

[14] R. Pagnan, 2012, “A diagrammatic calculus of syllogisms”, *Journal of Logic, Language and Information*. **21(3)**: 347–364.

[15] P. Peterson, 2000, *Intermediate Quantifiers: Logic, linguistics, and Aristotelian semantics*, Aldershot: Ashgate Publishing Limited.

[16] I. Pratt-Hartmann, 2008, “On the computational complexity of the numerically definite syllogistic and related logics”, *Bulletin of Symbolic Logic*, **14(1)**: 1–28.

[17] I. Pratt-Hartmann, 2011, “The Hamiltonian syllogistic”, *Journal of Logic, Language and Information*, **20(4)**: 445–474.

[18] I. Pratt-Hartmann, 2013, “The relational syllogistic revisited”, *Linguistic Issues in Language Technology*, **9(10)**: 1–35.

[19] I. Pratt-Hartmann, 2013, “The syllogistic with unity”, *Journal of Philosophical Logic*, **42(2)**: 391–407.

[20] I. Pratt-Hartmann and L. Moss, 2009, “Logics for the relational syllogism”, *Review of Symbolic Logic*, **2(4)**: 647–683.

[21] R. van Rooij, 2011, “The propositional and relational syllogistic”, *Logique et Analyse*, **55(217)**: 85–108.

[22] F. Sommers and G. Englebretsen, *An Invitation to Formal Reasoning—The logic of terms*, Aldershot: Ashgate Publishing Ltd.

[23] P. Thom, 1977, “*Termini Obliqui* and the logic of relations”, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, **59(2)**: 143–155.

[24] V. S. Valencia, 1991, *Studies on Natural Logic and Categorial Grammar*, PhD thesis, University of Amsterdam.

[25] 高东平，模糊量词的逻辑研究，2007 年.

（责任编辑：赵伟）

Relational Syllogisms with Generalized Quantifiers

Ka-fat Chow

Abstract

Based on certain fundamental principles of the Generalized Quantifier Theory and Propositional Logic including the substitution method, deduction theorem, premise replacement, introduction of existential assumptions, substitution of equivalence statements, this paper introduces a method for deriving valid relational syllogisms. Under this method, not only relational syllogisms with classical quantifiers but also those with non-classical quantifiers (such as numerical quantifiers, proportional quantifiers, vague quantifiers) can be derived. Apart from relational syllogisms with general binary predicates, this paper also discusses relational syllogisms with comparative adjectives. Finally, this paper proves the validity of the aforesaid method and discusses possible directions for further studies.

Ka-fat Chow　Department of Chinese and Bilingual Studies, The Hong Kong Polytechnic University
kfzhouy@yahoo.com