构造有效关系三段论的两种方法*

周家发
kfzhouy@yahoo.com
香港理工大学

摘要：
本文采用广义量词理论的框架，介绍两种构造有效关系三段论的方法—直接代入法和内嵌三段论法，并把这两种方法先后应用于包含一般二元谓词(在自然语言中一般表现为及物动词)和具有传递性、非对称性和反传递性的二元谓词(在自然语言中表现为比较级形容词)的关系三段论。本文亦以实例显示上述两种方法也可用来推导直接推理。

关键词：关系三段论、广义量词理论、直接代入法、内嵌三段论法、直接推理

1. 引言

自从现代数理逻辑兴起后，三段论丧失了以往在传统逻辑学中的首要地位。但由上世纪下半叶开始，三段论重新引起部分学者的兴趣。这些学者的一个研究方向是把一些新元素注入传统三段论的框架中，这些新元素包括：数值量词(Murphree (1991, 1998)、Pratt-Hartmann (2008))、模糊量词(Zadeh (1983)、Peterson (2000))、二元谓词(Keene (1969)、Thom (1977)、Sommers and Englebretsen (2000)、Pratt-Hartmann and Moss (2009)、Moss (2010, 2011)、van Rooij (2011))等，其中包含二元(或更高元)谓词的三段论又称为"关系三段论"(relational syllogism)。

在自然语言中，二元谓词常常表现为及物动词或比较级形容词，因此"关系三段论"是指在前提和结论中至少有一个命题包含及物动词或比较级形容词的三段论，有别于前提和结论都只包含一元谓词(在自然语言中表现为不及物动词、谓语形容词、谓语名词)的"简单三段论"(simple syllogism)。本文采用当代"广义量词理论"(Generalized Quantifier Theory)的框架，把含有宾语或关系从句的命题表达为"迭代量词"(iterated quantifier)，有关迭代量词的定义参见广义量词理论的文献(例如 Peters and Westerståhl (2006))。

为清晰表示量化命题的论元结构，本文采用Keenan (2002)的表

* 本文内容曾于"2012 年全国现代逻辑学术研讨会"(2012 年 11 月 17 日，复旦大学)上宣读，本文初稿载于《2012 年全国现代逻辑学术研讨会论文荟萃》。文末附有笔者对本文内容的最新修订。

达方式，把量化命题表达为“三分结构”(tripartite structure) “Q(A)(B)”的形式，其中Q代表“限定词”(determiner)，A和B则为Q的左论元和右论元，分别代表自然语言句子中的主语(略去限定词后的部分)和谓语。具有简单结构的量化命题，例如“每个男孩都是吸烟者”，可以表达为如下的简单三分结构，其左论元和右论元都是一元集合[1]：

(1) *every*(BOY)(SMOKER)

包含迭代量词的量化命题则可表达为复杂的三分结构，这个三分结构的某个论元包含另一个三分结构。举例说，一个含有宾语的量化命题，例如“每名重读生(以REPEATER代表)都重读(以RETAKE代表)大多数课程(以COURSE代表)”，便可表达为如下的复杂三分结构，其右论元包含另一个三分结构：

(2) *every*(REPEATER)({x: *most*(COURSE)({y: RETAKE(x, y)})})

类似地，包含关系从句的量化命题，例如“所有通过(以PASS代表)少于一半考试(以EXAM代表)的都是重读生”，便可表达为如下的复杂三分结构，其左论元包含另一个三分结构：

(3) *every*({x: (*less than 1/2 of*)(EXAM)({y: PASS(x, y)})})(REPEATER)

关系三段论是三段论研究上的一个难点，这是因为关系三段论远较简单三段论复杂和多样化。由于关系三段论包含二元(或更高元)谓词，这些谓词可能具有一元谓词所不具有的性质，例如传递性、非对称性等。对这些性质作出不同的选择便会产生不同的结果，由此可见关系三段论可以具有高度多样性。事实上，不同学者采用不同方法研究关系三段论。举例说，Keene (1969)便使用一阶谓词逻辑，在关系三段论的研究方面做了开创性的工作。可是，由于自然语言中有很多量词(例如“most”以及其他比例量词)并非一阶可定义，利用一阶谓词逻辑所能构造的关系三段论十分有限。为构造包含各种“非经典量词”的关系三段论，我们必须使用更强大的工具—广义量词理论。

本文将提出两种构造有效关系三段论的方法—“直接代入法”(direct substitution)和“内嵌三段论法”(syllogism embedding)。但在介绍这两种方法之前，须先指出在某些情况下，光靠这两种方法并不足够，还须辅以某些逻辑等价式或蕴涵式，才能构造出有效的关系三段论。在本文中，我们将用到两类逻辑等价式，这些等价式是用来改变迭代量词的内部结构，使之适于应用上述两种构造有效关系三段论的方法。第一类等价式涉及“前补”(complement)(亦称“外部否定”outer negation)、“后补”(postcomplement)(亦称“内部否定”inner negation)和“对偶”(dual)等概念，有关这些概念的定义，请参阅Keenan (2003)。

[1] 请注意 BOY (代表“男孩”)和 SMOKER (代表“吸烟者”)可被视为集合{x: BOY(x)}和{x: SMOKER(x)}的缩写。此外，动词“是”没有实在语义，所以在三分结构中没有表达出来。

举例说，根据Keenan (2003)的定理5，我们有以下等价关系(在下式中，$Q_1\neg$和$Q_2{}^d$分别代表Q_1的后补和Q_2的对偶)：

(4) $Q_1(A)(\{x: Q_2(B)(\{y: R(x, y)\})\}) \equiv Q_1\neg(A)(\{x: Q_2{}^d(B)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$

利用上述等价关系和“*every*”的后补和对偶分别为“*no*”和“*some*”此一事实，我们便可导出以下等价式：

(5) $every(A)(\{x: every(B)(\{y: R(x, y)\})\}) \equiv no(A)(\{x: some(B)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$

第二类等价式涉及迭代量词中论元或限定词的“换位”(transposition)和谓词的“逆”(converse)等概念。举例说，van Rooij (2011)提出以下等价式(在下式中，R^{-1}代表R的“逆”，即$R^{-1}(x, y) = R(y, x)$)：

(6) $no(A)(\{x: some(B)(\{y: R(x, y)\})\}) \equiv no(B)(\{x: some(A)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})$

我们可以证明(6)的有效性如下，首先把(6)改写成以下等价形式[2]：

(7) $every(A)(\{x: every(B)(\{y: R(x, y)\})\}) \equiv every(B)(\{x: every(A)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})$

由于根据Altman *et al* (2005)的推论3，(7)在有限论域下成立，所以(6)是有效的等价式。

除了等价式外，我们还需用到两类蕴涵式。第一类蕴涵式涉及迭代量词中论元或限定词的换位和谓词的逆等概念，但跟上述的等价式(6)不同，这类蕴涵式是单向而非双向推理关系。以下是这类蕴涵式的例子：

(8) $some(A)(\{x: every(B)(\{y: R(x, y))\})\}) \vdash every(B)(\{x: some(A)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\}))$

请注意(8)的有效性可根据Altman *et al* (2005)的事实2导出。

第二类蕴涵式来自古典“对当方阵”(square of opposition)中的“差等关系”(subalternate relation)，这类蕴涵式的有效性依赖于前提的“存在假设”(existential import)，即仅当前提中的某个项非空，有关蕴涵式才是有效的。以下我们把存在假设处理成一个附加前提。举例说，古典对当方阵中A句与I句之间的差等关系便可表达为以下蕴涵式：

(9) $A \neq \varnothing, every(A)(B) \vdash some(A)(B)$

请注意某些传统三段论也依赖于存在假设，Pagnan (2012)列举了传统

---

[2] 为证明(6)和(7)等价，我们首先使用等价式(5)把(6)的左端和右端变换为下式：

$$every(A)(\{x: every(B)(\{y: \neg R(x, y)\})\}) \equiv every(B)(\{x: every(A)(\{y: \neg R^{-1}(x, y)\})\})$$

由于R是任意变项，我们可以把“≡”号两端的R换为¬R，从而得到(7)。请注意对一般的R而言，我们有$(\neg R)^{-1} = \neg(R^{-1})$。

三段论所依赖的存在假设。以传统的AAI-3三段论为例[3]，仅当其“中项”(middle term)非空，这个三段论才是有效的。

我们可以利用逻辑蕴涵式由已知有效的三段论推导出其他有效三段论，这里有两种可行方法。第一种方法是加强其中一个前提，即用一个单向蕴涵该前提的命题来代换该前提；第二种方法是减弱结论，即用一个该结论单向蕴涵的命题来代换该结论。上述两种方法可得出有效的三段论，这是因为如果有$p_2 \vdash p_1$和$q_1 \vdash q_2$，那么由$p_1 \vdash q_1$，我们既可推出$p_2 \vdash q_1$ (此即加强前提)，亦可推出$p_1 \vdash q_2$ (此即减弱结论)。

本文的余下部分将作如下安排。第2节介绍构造有效关系三段论的第一种方法—直接代入法。第3节介绍第二种方法—内嵌三段论法，并把这种方法先后应用于包含一般二元谓词(在自然语言中一般表现为及物动词)和具有传递性、非对称性和反传递性的二元谓词(在自然语言中表现为比较级形容词)的关系三段论。第4节以实例显示上述两种方法也可用来推导“直接推理”(immediate inference)。第5节讨论上述两种方法的适用性和局限。

2. 直接代入法

构造关系三段论最简单的方法是把包含二元谓词的集合表达式直接代入某个有效简单三段论中的变项。传统三段论由三个命题组成，包含三个变项A、B、C。如果把一元集合代入这些变项，便可得到通常的简单三段论。但如果把包含二元谓词的集合表达式代入这些变项，便可得到关系三段论。举例说，把$A = \{x: (\textit{less than 1/2 of})(S)(\{y: R_1(x, y)\})\}$、$B = \{x: \textit{most}(O)(\{y: R_2(x, y)\})\}$代入传统的AAA-1三段论，便可马上得到以下同时包含宾语和关系从句的关系三段论：

(10) $\textit{every}(C)(\{x: \textit{most}(O)(\{y: R_2(x, y)\})\}), \textit{every}(\{x: (\textit{less than 1/2 of})(S)(\{y: R_1(x, y)\})\})(C) \vdash \textit{every}(\{x: (\textit{less than 1/2 of})(S)(\{y: R_1(x, y)\})\})(\{x: \textit{most}(O)(\{y: R_2(x, y)\})\})$

以下是上述三段论的一个实例(设S = EXAM、C = REPEATER、O = COURSE、R_1 = PASS、R_2 = RETAKE)：

(11) 每名重读生都重读大多数课程，所有通过少于一半考试的都是重读生；所以，所有通过少于一半考试的都重读大多数课程。

在某些情况下，我们需要使用某些逻辑等价式及／或蕴涵式以配合直接代入法。首先讨论一个须配合使用逻辑等价式的例子：

(12) $\textit{no}(M)(\{x: \textit{some}(B)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\}), \textit{no}(A)(\{x: \textit{every}(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\}) \vdash \textit{no}(A)(B)$

[3] 附录1载列本文将用到的传统三段论。

为推导上述三段论，我们首先把$C = \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}$代入传统的EAE-2三段论，从而得到

(13) $no(B)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}), every(A)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash no(A)(B)$

接着使用等价式(6)，把(13)的第一个前提改写为等价形式$no(M)(\{x: some(B)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})$。其次，利用等价关系(4)以及"*every*"的后补为"*no*"和"*some*"的对偶为"*every*"此一事实，我们可以把(13)的第二个前提改写为等价形式$no(A)(\{x: every(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$。由此可见，(13)等价于(12)，因而(12)的有效性可由(13)的有效性得到保证，而(13)是用直接代入法转换EAE-2三段论的结果，所以是有效的。以下是(12)的一个实例(设M = GIRL、B = SMOKER、A = BOY、R = LOVE)：

(14) 没有女孩为任何吸烟者所爱，没有男孩所有女孩他都不爱；所以，没有男孩是吸烟者。

接着讨论一个须配合使用逻辑蕴涵式的例子：

(15) $some(M)(\{x: every(B)(\{y: R^{-1}(x, y))\})\}), no(A)(\{x: some(M)(\{y: R (x, y)\})\}) \vdash no(A)(B)$

表面上，上述三段论似乎不能用代入法导出。但根据(8)，我们有以下蕴涵式，这个蕴涵式可帮助我们导出上述三段论：

(16) $some(M)(\{x: every(B)(\{y: R^{-1}(x, y))\})\}) \vdash every(B)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}))$

首先把$C = \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}$代入传统的AEE-2三段论，从而得到

(17) $every(B)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y))\})\}), no(A)(\{x: some(M)(\{y: R (x, y)\})\}) \vdash no(A)(B)$

请注意(17)的第一个前提等同于(16)的结论,所以可以用(16)的前提代换。经代换后，我们便得到(15)。换句话说，(15)可以透过加强(17)的第一个前提而得到。我们在第1节已指出，加强一个有效推理的前提，可以得到另一个有效推理，因此(15)的有效性可由(17)的有效性得到保证，而(17)是用直接代入法转换AEE -2三段论的结果，所以是有效的。以下是(15)的一个实例(设M = GIRL、B = SMOKER、A = BOY、R = LOVE)：

(18) 有女孩为每一个吸烟者所爱，没有男孩爱任何女孩；所以，没有男孩是吸烟者。

3. 内嵌三段论法

3.1 把内嵌三段论法应用于一般二元谓词

第二种构造关系三段论的方法是把一个简单三段论嵌入到另一个简单三段论中，其操作过程是先对一个简单三段论的变项进行代入，使所得三段论的某个前提和结论包含一个自由变项。接着我们用集合符号约束这个自由变项，从而把这个三段论转换为一个直接推理，其结论表达一个集合包含关系$X \subseteq Y$，请注意这个集合包含关系可以改写成命题$every(X)(Y)$。接着选择一个合适的三段论并作适当代入，使$every(X)(Y)$成为其中一个前提，并从而导出所需的结论。经进行上述过程后，便可得到一个关系三段论。

利用上述方法，我们容易构造包含非经典量词的关系三段论。以下讨论一个包含一般二元谓词和数值量词“$(at\ least\ m)$”和“$(at\ most\ n)$”的关系三段论：

(19) $(at\ least\ m + n)(S)(M)$, $every(O)(\{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$ $\vdash$ $every(O)(\{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\})$

为推导上述三段论，我们首先要选择一个包含数值量词的有效简单三段论，一个合适的选择是以下由Murphree (1991)提出的数值三段论[4]：

(20) $(at\ most\ n)(C)(\neg B)$, $(at\ least\ m + n)(A)(C)$ $\vdash$ $(at\ least\ m)(A)(B)$

我们首先把$A = S$、$B = \{y: R(x, y)\}$和$C = M$代入(20)，并使用等价式$\neg\{y: P(y)\} = \{y: \neg P(y)\}$ (其中P为任意谓词)，从而得到以下三段论，其第一个前提和结论包含自由变项x：

(21) $(at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})$, $(at\ least\ m + n)(S)(M)$ $\vdash$ $(at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})$

根据命题逻辑中的“条件证明律”(亦称“→引入律”)，我们可以把(21)中的某一个前提抽出来作为前件，与(21)的结论组成一个蕴涵式，从而把(21)改写为：

(22) $(at\ least\ m + n)(S)(M)$ $\vdash$ $(at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\}) \rightarrow (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})$

由于上式的右端包含自由变项x，我们可以把上式改写为：

(23) $(at\ least\ m + n)(S)(M)$ $\vdash$ $\{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\} \subseteq \{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\}$

请注意(23)的结论具有$X \subseteq Y$的形式，因此可以改写成命题$every(X)(Y)$。换言之，(23)的结论等价于$every(\{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\})(\{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\})$。接着把$A = O$、$B = \{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\}$和$C = \{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\}$代入AAA-1三段论，从而得到

(24) $every(\{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\})(\{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\})$, $every(O)(\{x: (at\ most\ n)(M)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$ $\vdash$

[4] 以下三段论的有效性可用这两个数值量词的真值条件：$(at\ most\ n)(A)(B) \equiv |A \cap B| \leq n$；$(at\ least\ m)(A)(B) \equiv |A \cap B| \geq m$ 以及某些集合论定律证得。

$every(O)(\{x: (at\ least\ m)(S)(\{y: R(x, y)\})\})$

请注意上述三段论的第一个前提等同于(23)中的结论，因此可以用(23)的前提，即$(at\ least\ m + n)(S)(M)$代换(这样做等同于加强(24)的前提)。经代换后，我们便得到(19)。根据以上所述，(19)可被视为把数值三段论(20)嵌入AAA-1三段论的结果，因此(19)的有效性可由这两个三段论的有效性得到保证。以下是(19)的一个实例(设m = 2、n = 3、S = BOY、M = SMOKER、O = GIRL、R = LIKE，并假设"喜欢"与"不喜欢"构成矛盾关系)：

(25) 有至少五名男孩是吸烟者，每名女孩不喜欢最多三名吸烟者；所以，每名女孩喜欢至少两名男孩。

接着讨论一个须依赖存在假设的关系三段论：

(26) $S \neq \varnothing,\ every(M)(O),\ every(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

为推导上述三段论，我们首先把$A = O$、$B = \{y: R(x, y)\}$和$C = M$代入传统的IAI-3三段论，从而得到

(27) $some(M)(\{y: R(x, y)\}),\ every(M)(O) \vdash some(O)(\{y: R(x, y)\})$

上式可改写为：

(28) $every(M)(O) \vdash \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\} \subseteq \{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\}$

上式中的结论等价于$every(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\})$。接着把$A = S$、$B = \{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\}$和$C = \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}$代入传统的AII-1三段论：

(29) $every(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\}),\ some(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

请注意(29)的第一个前提等同于(28)的结论，因此可以用(28)的前提，即$every(M)(O)$代换。经代换后，我们得到

(30) $every(M)(O),\ some(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

根据(9)，上式的第二个前提可在假设$S \neq \varnothing$的情况下由$every(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})$导出，即

(31) $S \neq \varnothing,\ every(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})$

因此(30)的第二个前提可用(31)中的两个前提，即$S \neq \varnothing$和$every(S)(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})$代换。经代换后，我们便得到(26)。由于(26)是把IAI-3三段论嵌入AII-1三段论并利用(9)所得的结果，其有效性可由这两个三段论和(9)的有效性得到保证。以下是(26)的一个实例(设S = GIRL、M = BOY、O = SMOKER、R = LIKE)：

(32) 有至少一名女孩，每名男孩都是吸烟者，每名女孩都喜欢至少一名男孩；所以，有至少一名女孩喜欢至少一名吸烟者。

3.2 把内嵌三段论法应用于比较级形容词

在上一小节讨论的关系三段论中，R是一般的二元关系。在自然语言中，这类关系常常表现为及物动词。在某些情况下，我们需要构造包含比较级形容词的关系三段论，这时我们便要规定R须具备某些特别性质。根据Keene (1969)，我们假设比较级形容词具有“传递性”(transitivity)、“非对称性”(asymmetry)和“反传递性”(counter-transitivity)这三种性质。以下是这三种性质的定义：

(33) 二元关系 R 是传递的当且仅当对所有 x、y、z 而言，均有 $R(x, y), R(y, z) \vdash R(x, z)$。

(34) 二元关系 R 是非对称的当且仅当对所有 x、y 而言，均有 $R(x, y) \vdash \neg R^{-1}(x, y)$。

(35) 二元关系 R 是反传递的当且仅当对所有 x、y、z 而言，均有$\neg R(x, y), \neg R(y, z) \vdash \neg R(x, z)$。

根据上述定义，我们可以推导具有这些性质的二元关系的定理。以下是下文将要用到的两个定理(以下定理及其证明将用到广义量词理论文献中常常提到的“(左/右)递增性”(left / right increasing monotonicity)，有关“(左/右)递增性”的定义可参阅Peters and Westerståhl (2006))[5]：

定理 1 设 R 为传递和非对称二元关系、A 为集合、x 为个体、Q 为右递增限定词，则 $some(\{z: Q(A)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\}) \vdash Q(A)(\{y: R(x, y)\}) \vdash Q(A)(\{y: \neg R^{-1}(x, y)\})$。

定理 2 设 R 为传递和反传递二元关系，则对任意非空集合 A 和 B，均有 $some(A)(\{x: every(B)(\{y: R(x, y)\})\}) \equiv every(B)(\{x: some(A)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})$。

请注意根据上文的(8)，若R为一般的二元关系，则$some(A)(\{x: every(B)(\{y: R(x, y)\})\})$单向蕴涵$every(B)(\{x: some(A)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})$。定理2告诉我们，若R具有传递性和反传递性，则上述单向蕴涵关系便会加强为等价关系。

以下说明如何运用这两个定理。首先讨论以下三段论(其中R是传递、非对称和反传递二元关系)：

(36) $some(O)(\{z: every(M)(\{w: R(z, w)\})\}), some(M)(\{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash every(S)(\{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$

[5] 这两个定理的证明载于附录2。

为推导上述三段论，我们首先把 $A = \{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\}$、$B = \{y: R^{-1}(x, y)\}$和 $C = M$ 代入传统的 IAI-3 三段论，从而得到

(37) $some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\}), every(M)(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\}) \vdash some(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\})(\{y: R^{-1}(x, y)\})$

由于“*some*”是右递增限定词，根据定理 1，我们有

(38) $some(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\})(\{y: R^{-1}(x, y)\}) \vdash some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})$

由于(38)的前提等同于(37)的结论，我们可以用(38)的结论代换(37)的结论(这样做等同于减弱(37)的结论)，从而得到

(39) $some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\}), every(M)(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\}) \vdash some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})$

由于上式包含自由变项 x，上式可改写为

(40) $every(M)(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\}) \vdash \{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\} \subseteq \{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\}$

上式的结论等价于 $every(\{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})(\{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$。接着把 $A = S$、$B = \{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\}$和 $C = \{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\}$代入 AAA-1 三段论，从而得到

(41) $every(\{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\})(\{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\}), every(S)(\{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\}) \vdash every(S)(\{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$

请注意上述三段论的第一个前提等同于(40)中的结论，因此可以用(40)的前提，即 $every(M)(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\})$代换。经代换后，我们得到

(42) $every(M)(\{z: some(O)(\{w: R^{-1}(z, w)\})\}), every(S)(\{x: some(M)(\{y: R^{-1}(x, y)\})\}) \vdash every(S)(\{x: some(O)(\{y: \neg R(x, y)\})\})$

接着应用定理 2 两次，把上述三段论的两个前提转换为其等价命题，便可得到(36)。由于(36)是把 IAI-3 三段论嵌入 AAA-1 三段论和应用定理 1 和定理 2 的结果，其有效性由这两个三段论和这两个定理的有效性得到保证。以下是(36)的一个实例(设 S = PHYSICIST、M = MATHEMATICIAN、O = LOGICIAN、R = SMARTER-THAN)：

(43) 至少有一位逻辑学家比所有数学家都聪明，至少有一位数学家比所有物理学家都聪明；所以，每位物理学家都不比至少一位逻辑学家聪明。

接着讨论一个包含“单称词项”(singular term)的关系三段论(其中o是个体常项；R是传递、非对称和反传递二元关系)：

(44) $some(M)(\{y: R(o, y)\}), every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash$

$every(S)(\{y: R(o, y)\})$

我们首先把上述三段论转换为包含经典量词的三段论。为此，我们沿用Sommers and Englebretsen (2000)提议的方法，用“$every(\{o\})$”代表单称词项“o”。以下是经上述转换的三段论：

(45) $every(\{o\})(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}), every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash every(\{o\})(\{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\})$

接着开始推导上述三段论。首先把$A = \{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}$、$B = \{y: R(x, y)\}$和$C = M$代入IAI-3三段论，由此得到

(46) $some(M)(\{y: R(x, y)\}), every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash some(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\})$

由于“*every*”是右递增限定词，根据定理1，我们有

(47) $some(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\}) \vdash every(S)(\{y: R(x, y)\})$

由于(47)的前提等同于(46)的结论，我们可以用(47)的结论代换(46)的结论，从而得到

(48) $some(M)(\{y: R(x, y)\}), every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash every(S)(\{y: R(x, y)\})$

由于上式包含自由变项x，上式可以改写为

(49) $every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\} \subseteq \{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\}$

上式的结论等价于$every(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\})$。接着把$A = \{o\}$、$B = \{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\}$和$C = \{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}$代入AAA-1三段论，从而得到

(50) $every(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\}), every(\{o\})(\{x: some(M)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash every(\{o\})(\{x: every(S)(\{y: R(x, y)\})\})$

请注意上述三段论的第一个前提等同于(49)中的结论，所以可以用(49)中的前提，即$every(M)(\{z: every(S)(\{w: R(z, w)\})\})$代换。经代换后，我们便得到(45)。由于(45)是把IAI-3三段论嵌入AAA-1三段论和应用定理1的结果，其有效性(以及(44)的有效性)由这两个三段论和定理1的有效性得到保证。以下是(44)的一个实例(设M = WOMAN、o = Oliver、S = CHILD、R = TALLER-THAN)：

(51) Oliver 比至少一名女子高，每名女子比所有小孩都高；所以，Oliver 比所有小孩都高。

4. 直接推理

第2和第3节介绍的两种方法也可用来构造直接推理，即只包含一个前提的推理。举例说，van Rooij (2011)讨论过以下直接推理：

(52) 所有马都是动物；所以，每一个拥有(至少)一匹马的都拥有(至少)一头动物。

上述推理可以表达为(设C = HORSE, A = ANIMAL, R = OWN)：

(53) $\mathit{every}(C)(A) \vdash \mathit{every}(\{x: \mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{some}(A)(\{y: R(x, y)\})\})$

为构造上述直接推理，van Rooij (2011)把下列重言式作为附加前提(这个前提的意思是“每一个拥有(至少)一匹马的都拥有(至少)一匹马”)加到(53)中，从而把(53)转化为一个三段论：

(54) $\mathit{every}(\{x: \mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\})\})$

但如使用本文介绍的方法，便无需引入任何附加前提。为构造(53)，我们可以首先把$B = \{y: R(x, y)\}$代入IAI-3三段论，从而得到

(55) $\mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\}), \mathit{every}(C)(A) \vdash \mathit{some}(A)(\{y: R(x, y)\})$

由于上式包含自由变项x，上式可以改写为

(56) $\mathit{every}(C)(A) \vdash \{x: \mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\})\} \subseteq \{x: \mathit{some}(A)(\{y: R(x, y)\})\}$

把上式中的结论改写成$\mathit{every}(\{x: \mathit{some}(C)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{some}(A)(\{y: R(x, y)\})\})$后，便马上得到(53)。由于(53)是对IAI-3三段论进行代入的结果，其有效性由这个三段论的有效性得到保证。

事实上，正如我们在上一节所介绍的，在使用内嵌三段论法的过程中，我们会推导出集合包含关系$X \subseteq Y$以作为中间结果，这个集合包含关系可以改写成命题$\mathit{every}(X)(Y)$以作为直接推理的结论。举例说，从上文的(49)，我们可以得到以下直接推理(其中R是传递、非对称和反传递二元关系)：

(57) $\mathit{every}(M)(\{z: \mathit{every}(S)(\{w: R(z, w)\})\}) \vdash \mathit{every}(\{x: \mathit{some}(M)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{every}(S)(\{y: R(x, y)\})\})$

上述直接推理可被视为推导关系三段论(45)过程中的“副产品”。

因此，本文介绍的方法不仅可用来推导有效关系三段论，而且可以作为一种“副产品”推导出包含迭代量词和二元谓词的直接推理。

5. 总结

本文介绍了两种构造有效关系三段论的方法，虽然只讨论了少数几个例子，但这两种方法有颇大的适用性。事实上，可以证明，使用这两种方法能构造出Keene (1969)、Thom (1977)、Peterson (2000)、Sommers and Englebretsen (2000)、van Rooij (2011)讨论和列举的所有有效关系三段论，以及Pratt-Hartmann and Moss (2009)和Moss (2010,

2011)讨论和列举的大多数三段论模式及公理。对于包含比较级形容词的关系三段论而言，除了定理1和定理2外，还需要应用其他定理，但这些定理不难从传递性、非对称性和反传递性的定义导出。此外，虽然本文只讨论了二元谓词，但不难把本文介绍的这两种方法推广应用于三元或甚至更高元谓词。事实上，可以证明，使用这两种方法能构造出Murphree (1998)和Sommers and Englebretsen (2000)讨论过的包含三元谓词的有效关系三段论。

不过，这两种方法并非万能。在Pratt-Hartmann and Moss (2009)和Moss (2010, 2011)列举的三段论模式和公理中，有一些便不能用这两种方法构造出来，这些三段论的共同特点是要用反证法或穷举证法才能构造出来或予以证明。以下是这类三段论的例子：

(58) $some(S)(\{x: some(S)(\{y: R(x, y)\})\}), no(O)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\neg O)$

(59) $every(M)(\{x: every(O)(\{y: R(x, y)\})\}), every(\neg M)(\{x: every(O)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash every(S)(\{x: every(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

三段论(58)是从Pratt-Hartmann and Moss (2009)讨论的关系三段论实例(14)抽象出来的[6]，可以用反证法来证明。为此，首先假设其结论的否定命题，即$no(S)(\neg O)$真，这个否定命题等价于$every(S)(O)$。由$every(S)(O)$和(58)的第一个前提，可以用本文介绍的两种方法证明$some(O)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\})$真。但此一结果与(58)的第二个前提相矛盾，由此可知$some(S)(\neg O)$必真。

三段论(59)等价于Moss (2011)提出的公理"LEM"，可以用穷举证法来证明。首先设$M = \varnothing$，由此有$\neg M = U$ (其中U代表论域)。在此假设下，(59)的第二个前提等于说U的任一成员x都满足$every(O)(\{y: R(x, y)\})$。由于S是U的子集，由此必有S的任一成员x都满足$every(O)(\{y: R(x, y)\})$，即(59)的结论真。其次设$M \neq \varnothing$，对U的任一成员x，要么$x \in M$，要么$x \in \neg M$。若$x \in M$，则根据(59)的第一个前提，x满足$every(O)(\{y: R(x, y)\})$。若$x \in \neg M$，则根据(59)的第二个前提，x亦满足$every(O)(\{y: R(x, y)\})$。因此U的任一成员x都满足$every(O)(\{y: R(x, y)\})$，由此可知(59)的结论真。

上述讨论显示有一些有效关系三段论不能用本文介绍的两种方法构造出来或予以证明。鉴于关系三段论所包含的二元或更高元谓词具有复杂性和多样性，上述结果并不令人意外。事实上，在关系三段论的研究方面，我们仍有大量工作要做。不过，透过提供两种构造有效关系三段论的有用方法，本文对关系三段论的研究作出了一定贡

[6] Pratt-Hartmann and Moss (2009)讨论的三段论实例是"有艺术家厌恶艺术家。没有养蜂家厌恶任何养蜂家。因此，有艺术家不是养蜂家"。

献。

附录1　部分传统三段论

AAA-1三段论：$every(C)(B), every(A)(C) \vdash every(A)(B)$

AAI-3三段论：$C \neq \varnothing, every(C)(B), every(C)(A) \vdash some(A)(B)$

AEE-2三段论：$every(B)(C), no(A)(C) \vdash no(A)(B)$

AII-1三段论：$every(C)(B), some(A)(C) \vdash some(A)(B)$

EAE-2三段论：$no(B)(C), every(A)(C) \vdash no(A)(B)$

IAI-3三段论：$some(C)(B), every(C)(A) \vdash some(A)(B)$

附录2　本文定理的证明

定理 1　设 R 为传递和非对称二元关系、A 为集合、x 为个体、Q 为右递增限定词，则 $some(\{z: Q(A)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\}) \vdash Q(A)(\{y: R(x, y)\}) \vdash Q(A)(\{y: \neg R^{-1}(x, y)\})$。

证明：

设 $some(\{z: Q(A)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\})$真，则存在 z 使得 $Q(A)(\{w: R(z, w)\})$和 $R(x, z)$皆真。根据 R 的传递性，对任何 w，均有 $R(x, z), R(z, w) \vdash R(x, w)$。这即是说，若 $R(x, z)$真，则有$\{w: R(z, w)\} \subseteq \{w: R(x, w)\}$。由此根据 Q 的右递增性，可得 $Q(A)(\{w: R(z, w)\}) \vdash Q(A)(\{w: R(x, w)\})$。至此证得 $some(\{z: Q(A)(\{w: R(z, w)\})\})(\{y: R(x, y)\}) \vdash Q(A)(\{w: R(x, w)\})$。另一方面，根据 R 的非对称性，对任何 w，均有 $R(x, w) \vdash \neg R^{-1}(x, w)$。因此，$\{w: R(x, w)\} \subseteq \{w: \neg R^{-1}(x, w)\}$。由此根据 Q 的右递增性，可得 $Q(A)(\{w: R(x, w)\}) \vdash Q(A)(\{w: \neg R^{-1}(x, w)\})$。由于上述证明过程中的“w”是任意变项，可以用“y”来代替，本定理证毕。□

在定理2的证明中，我们要用到以下引理。

引理　设 R 为反传递二元关系，则对任意 x、y、z，均有

(a) $R(x, y), \neg R(x, z) \vdash R(z, y)$；

(b) $R(x, y), \neg R(z, y) \vdash R(x, z)$。

证明：

(a) 假设$R(x, y)$和$\neg R(x, z)$真，并设$R(z, y)$假，即$\neg R(z, y)$真。由于R具有反传递性，由$\neg R(x, z)$和$\neg R(z, y)$可导出$\neg R(x, y)$，与前提$R(x, y)$相矛盾，由此证得$R(z, y)$必真。

(b) 假设$R(x, y)$和$\neg R(z, y)$真，并设$R(x, z)$假，即$\neg R(x, z)$真。由于R具有反传递性，由$\neg R(x, z)$和$\neg R(z, y)$可导出$\neg R(x, y)$，与前提$R(x, y)$相矛盾，由此证得$R(x, z)$必真。　□

定理 2　设R为传递和反传递二元关系，则对任意非空集合A和B，均有 *some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})}) ≡ *every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})})。

证明：

根据(8)，*some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})}) ⊢ *every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})})。因此我们只需证明命题 p：*every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})}) ⊢ *some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})})。以下我们对|A|进行归纳，以证明此命题。首先假设|A| = 1 和 A = {a}，由 *every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})})，可知对任何 b ∊ B，均有 R^{-1}(b, a)，即 R(a, b)。因此存在 a ∊ A，使得对任何 b ∊ B，均有 R(a, b)真，即 *some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})})真。

其次假设对|A| = n，命题 p 真，现考虑|A| = n + 1 的情况。从 A 中任意选取成员 x，并定义 A' = A – {x}，由此得|A'| = n。设 *every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})})真，则对任何 b ∊ B，均有 a ∊ A，使得 R^{-1}(b, a)真，其中 a 可能等于 x 或 A'中的成员。以下考虑两种可能情况。

<u>情况 1</u>：若上述所有 a 都是 A'的成员，则命题 *every*(B)({x: *some*(A)({y: R^{-1}(x, y)})})可以改写为 *every*(B)({x: *some*(A')({y: R^{-1}(x, y)})})。由于|A'| = n，根据上述归纳假设，此命题蕴涵 *some*(A')({x: *every*(B)({y: R(x, y)})})。由于 A' ⊆ A，根据"*some*"的左递增性，我们亦有 *some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})})，由此证得命题 p 真。

<u>情况 2</u>：若上述至少有一个 a 等于 x，即存在至少一个 b，使得 R^{-1}(b, x)真，则对任何 a' ∊ A'，要么 R^{-1}(x, a')真，要么¬R^{-1}(x, a')真。以下考虑两种可能情况。

<u>子情况 2a</u>：若存在至少一个 a'，使得 R^{-1}(x, a')真，则由于 R^{-1}(b, x), R^{-1}(x, a') ⊢ R^{-1}(b, a')，我们可以用 R^{-1}(b, a')取代每个 R^{-1}(b, x)。这样做的结果是把这个子情况化约为情况 1。

<u>子情况 2b</u>：若不存在任何 a'，使得 R^{-1}(x, a')真，或换句话说，对任何 a'，均有¬R^{-1}(x, a')真，则必有对任何 b ∊ B，均有 R(x, b)真，以下让我们证明这一点。如上所述，对任何 b ∊ B，要么 R^{-1}(b, x)真，要么 R^{-1}(b, a')真(其中 a' ∊ A')。若 R^{-1}(b, x)真，则这个 b 满足 R(x, b)。若 R^{-1}(b, a')真，则根据上述引理，我们有 R^{-1}(b, a'), ¬R^{-1}(x, a') ⊢ R^{-1}(b, x)，因此这个 b 亦满足 R(x, b)。由此证得对任何 b ∊ B，均有 R(x, b)真。由于 x ∊ A，我们有 *some*(A)({x: *every*(B)({y: R(x, y)})})真，由此证得命题 p 真。

至此我们证得若对|A| = n，命题 p 真，则对|A| = n + 1，命题 p 也真。由此证得对任何可能|A|，命题 p 皆真。□

参考文献

Alon Altman, Ya'acov Peterzil and Yoad Winter (2005). Scope Dominance with Upward Monotone Quantifiers. *Journal of Logic, Language and Information*, 14.4: 445 – 455.

Edward Keenan (2002). Some Properties of Natural Language Quantifiers: Generalized Quantifier Theory. *Linguistics and Philosophy*, 25: 627 – 654.

Edward Keenan (2003). Excursions in Natural Logic. In Casadio, C. *et al* (Eds.), *Language and Grammar: Studies in Mathematical Linguistics and Natural Language* (31 – 52). Stanford: CSLI.

Fred Sommers and George Englebretsen (2000). An Invitation to Formal Reasoning – The logic of terms. Aldershot: Ashgate Publishing Ltd.

G.B. Keene (1969). The Relational Syllogism: A Systemic Approach to Relational Logic. Exeter: University of Exeter Press.

Ian Pratt-Hartmann (2008). On the Computational Complexity of the Numerically Definite Syllogistic and Related Logics. *Bulletin of Symbolic Logic*, 14(1): 1 – 28.

Ian Pratt-Hartmann and Lawrence Moss (2009). Logics for the Relational Syllogism. *Review of Symbolic Logic*, 2(4): 647 – 683.

Lawrence Moss (2010). Syllogistic Logics with Verbs. *Journal of Logic and Computation*, Vol. 20, Issue 4: 947 – 967.

Lawrence Moss (2011). Syllogistic Logic with Comparative Adjectives. *Journal of Logic, Language and Information*, Vol. 20, No. 3: 397 – 417.

Lotfi Zadeh (1983). A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 9, No. 1: 149–184.

Paul Thom (1977). Termini Obliqui and the Logic of Relations. *Archive für Geschichte der Philosophie*, Vol. 59: 143 – 155.

Philip Peterson (2000). Intermediate Quantifiers – Logic, linguistics, and Aristotelian semantics. Aldershot: Ashgate Publishing Limited.

Robert van Rooij (2011). The propositional and relational syllogistic. *Logique et Analyse*, Vol. 55.

Ruggero Pagnan (2012). A Diagrammatic Calculus of Syllogisms. *Journal of Logic, Language and Information*.

Stanley Peters and Dag Westerståhl (2006). Quantifiers in Language and Logic. Oxford: Clarendon Press.

Wallace Murphree (1991). Numerically Exceptive Logic: A Reduction of the Classical Syllogism. New York: Peter Lang Publishing Inc.

Wallace Murphree (1998). Numerical Term Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 39, No. 3: 346 – 362.

本文的修订

本文早期版本的第5节曾指出某些有效关系三段论不能用本文介绍的方法推导出来，并且具体列出(58)和(59)作为例证。但后来我们发现，这些关系三段论其实也可以用用本文介绍的方法推导出来，其关键是要选用合适的(非经典)简单三段论，或者引入更多等价变换(包括整个推理而非仅其中一个命题的等价变换)。以下使用本文介绍的方法推导(58)和(59)。

为推导(58)，要使用以下推理等价变换，设p、q和r为命题，那么以下两个推理互相等价，因而可以互换：

(60) $p, q \vdash r$

(61) $q, \neg r \vdash \neg p$

现在把A = O、B = {y: R(x, y)}和C = S代入IAI-3三段论：

(62) $\mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\}), \mathit{every}(S)(O) \vdash \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})$

上述结果包含自由变项x，由此沿用本文介紹的内嵌三段论法，可得到

(63) $\mathit{every}(S)(O) \vdash \mathit{every}(\{x: \mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

接着把A = S、B = {x: *some*(O)({y: R(x, y)})}和C = {x: *some*(S)({y: R(x, y)})}代入AII-1三段论：

(64) $\mathit{every}(\{x: \mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\})\})(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\}), \mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash \mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

由于上式的第一个前提等同于(63)的结论，因此可以用(63)的前提，即*every*(S)(O)代换。经代换后，得到

(65) $\mathit{every}(S)(O), \mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash \mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

接着再把A = O、B = {x: *some*(O)({y: R(x, y)})}和C = S代入IAI-3三段论：

(66) $\mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\}), \mathit{every}(S)(O) \vdash \mathit{some}(O)(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

由于上式的第一个前提等同于(65)的结论，因此可以用(65)的第二个前提*some*(S)({x: *some*(S)({y: R(x, y)})})代换(上式的第二个前提*every*(S)(O)等同于(65)的第一个前提，所以无需代换)。经代换后，得到

(67) $\mathit{every}(S)(O), \mathit{some}(S)(\{x: \mathit{some}(S)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash \mathit{some}(O)(\{x: \mathit{some}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

最后，运用上述推理等价变换，可把上述推理变换成(这里还要运用

$\neg some = no$以及$\neg every(A)(B) \equiv some(A)(\neg B)$这两个等价关系)：

(68) $some(S)(\{x: some(S)(\{y: R(x, y)\})\}), no(O)(\{x: some(O)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash some(S)(\neg O)$

上述推理正是(58)。

为推导(59)，我们要选用以下非经典简单三段论：

(69) $every(C)(B), every(\neg C)(B) \vdash every(A)(B)$

上述三段论的理据如下：设上式中的两个前提成立，那么就论域U的任一成员x而言，要么$x \in C$，要么$x \in \neg C$。若$x \in C$，则根据上式中的第一个前提，有$x \in B$。若$x \in \neg C$，则根据上式中的第二个前提，也有$x \in B$。因此U的任一成员x都是B的成员，即$U = B$。因此，对U中的任意子集A，必有$A \subseteq B$，即$every(A)(B)$。

接着运用直接代入法，把$A = S$、$B = \{x: \mathrm{every}(O)(\{y: R(x, y)\})\}$和$C = M$代入(69)：

(70) $every(M)(\{x: \mathrm{every}(O)(\{y: R(x, y)\})\}), every(\neg M)(\{x: \mathrm{every}(O)(\{y: R(x, y)\})\}) \vdash every(S)(\{x: \mathrm{every}(O)(\{y: R(x, y)\})\})$

上述推理正是(59)。