

數學示例：拉普拉斯變換

「拉普拉斯變換」是「積分變換」(integral transform) 的一種，積分變換是指通過積分運算把函數從某個函數空間映射到另一個函數空間的運算。拉普拉斯變換的一個重要用途是把微分／積分方程轉化成較易解的方程，因而是微分／積分方程理論中的重要課題。本文主旨是介紹拉普拉斯變換的基本概念和結果，以及如何運用此概念求解某些線性微分／積分方程 (組)。

首先定義拉普拉斯變換。設 $f(x)$ 為以 x 為變項並在 $[0, \infty)$ 上有定義的連續函數，則 $f(x)$ 的拉普拉斯變換(Laplace transform)，以下記作 $F(s)$ 或 $\mathcal{L}\{f(x)\}$ ，是以 s 為變項並由下式定義的函數 (如果以下極限存在)：

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{x=b} e^{-sx} f(x) \quad (1)$$

以下讓我們用上述定義以及「微積分基本定理」(見《數學示例：積分與和分》的 (6)) 求最簡單的常數函數 $f(x) = 1$ 的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{x=b} (e^{-sx} \times 1) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s}, \text{ 若 } s > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

請注意上述計算結果帶有「若 $s > 0$ 」這個條件，因為若 $s \leq 0$ ，上式中的極限不存在。

反過來，設 $F(s)$ 為以 s 為變項的函數，則 $F(s)$ 的逆拉普拉斯變換(inverse Laplace transform)，以下記作 $f(x)$ 或 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ，是以 x 為變項並且滿足 $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ 的函數。舉例說，根據 (2) 所示的計算結果，可知

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad (3)$$

理論上存在直接求「逆拉普拉斯變換」的公式，但由於有關公式頗為複雜，一般是透過辨認 $F(s)$ 的外形推斷其逆變換。下表列出某些初等連續函數的「拉普拉斯變換」(在下表中， $n \in \mathbb{N}$ ， $a \in \mathbb{R}$)：

表 1

$f(x)$	$\mathcal{L}\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{s}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

為簡單起見，上表並不列出使 $\mathcal{L}\{f(x)\}$ 存在的條件。以下假設所討論的連續函數 $f(x)$ 都存在相對應的 $F(s)$ 。

接著介紹上述 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^{-1}$ 算子的一些重要性質。首先，這兩個算子具有線性性質，即對任何連續函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $F(s)$ 、 $G(s)$ 和任何實數 c ，都有 $\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}$ ， $\mathcal{L}\{cf(x)\} = c\mathcal{L}\{f(x)\}$ 以及 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ ， $\mathcal{L}^{-1}\{cF(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ 。

以下定理提供連續函數 $f(x)$ 與指數函數 e^{ax} 或冪函數 x^n 的乘積的拉普拉斯變換。

定理 1：設 $f(x)$ 為連續函數， $F(s)$ 為其拉普拉斯變換， $a \in \mathbb{R}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則

$$(i) \quad \mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a) \quad (4)$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n D^n F(s) \quad (5)$$

除了與指數函數和冪函數的乘積外，連續函數之間還可以有一種稱為「捲積」的乘積，設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為連續函數，則這兩個函數的捲積(convolution)，以下記作 $f(x) * g(x)$ ，可定義為

$$f(x) * g(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)g(x-t) \quad (6)$$

可以證明，捲積具有一般乘法的重要性質，例如交換性、結合性、對加法的分配性等，故被稱為「積」。以下定理提供函數捲積的拉普拉斯變換。

定理 2： 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為連續函數， $F(s)$ 和 $G(s)$ 為其拉普拉斯變換，則 (在下式中， $\times$ 代表函數之間的 (普通) 乘積)：

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s) \times G(s) \quad (7)$$

上述定理可以概括為，「捲積」的拉普拉斯變換等於拉普拉斯變換的 (普通) 「乘積」。

為把拉普拉斯變換用於求解微分方程，接著引入以下有關連續函數導數的拉普拉斯變換的定理。

定理 3： 設 $f(x)$ 為連續函數， $F(s)$ 為其拉普拉斯變換， $n \in \mathbb{N}$ ，則：

$$\mathcal{L}\{D^n f(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} Df(0) - \dots - D^{n-1} f(0) \quad (8)$$

接下來讓我們應用上述概念和結果，考慮以下 2 階常微分方程初值問題：

$$D^2 f(x) - 2Df(x) + 5f(x) + 8e^{-x} = 0, \quad f(0) = 2, Df(0) = 12 \quad (9)$$

首先應用「表 1」、 $\mathcal{L}$ 算子的線性性質和 (8) 求上式的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^2 f(x) - 2Df(x) + 5f(x) + 8e^{-x}\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ s^2 F(s) - sf(0) - Df(0) - 2(sF(s) - f(0)) + 5F(s) + \frac{8}{s+1} &= 0 \\ (s^2 - 2s + 5)F(s) - 2s - 8 + \frac{8}{s+1} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的微分方程 (9) 變換成以 $F(s)$ 為未知項的代數方程 (10)，由此可解得

$$F(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} \quad (11)$$

接著應用「表 1」、 $\mathcal{L}^{-1}$ 算子的線性性質、「定理 1」以及其他代數運算技巧，求上式的逆拉普拉斯變換，所得結果 $f(x)$ 就是 (9) 的解。由於上式的分母是兩項的乘積，先要對上式進行「部分分式分解」(partial fraction decomposition)。由於上式分母中的 $s^2 - 2s + 5$ 不能因式分解，根據有關部分分式分解的理論，假設

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 - 2s + 5}$$

從上式可解出 $k_1 = -1, k_2 = 3, k_3 = 5$, 由此有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 + 10s}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s+1} + \frac{3s+5}{s^2 - 2s + 5} \right\} \\
 &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - (-1)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s-1) + 8}{(s-1)^2 + 4} \right\} \\
 &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - (-1)} \right\} + 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2} \right\} + 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} \right\} \\
 &= -e^{-x} + 3e^x \cos(2x) + 4e^x \sin(2x) \quad (12)
 \end{aligned}$$

在上面第三行，我們用「配方法」把分母 $s^2 - 2s + 5$ 寫成 $(s-1)^2 + 2^2$ 的形式。這麼一來，也要把分子 $3s+5$ 改寫成 $3(s-1) + 8$ ，使分子和分母都包含 $s-1$ 這項。在第四行，我們從第二項和第三項分別抽出常數 3 和 4，使 $\mathcal{L}^{-1}\{\}$ 內數式的分子分別為 $s-1$ 和 2，以對應分母中的 $(s-1)^2$ 和 2^2 ，以便接下來應用「表 1」。請注意由於第四行的第二和第三項的分母是 $(s-1)^2 + 2^2$ 而非 $s^2 + 2^2$ ，要在最後一行綜合應用「表 1」和 (4)。

接下來讓我們看一個要綜合運用上述三個定理的例子，考慮以下 2 階常微分方程初值問題：

$$D^2 f(x) - 2Df(x) + f(x) - 2x \sin x = 0, \quad f(0) = 0, Df(0) = 0 \quad (13)$$

由於上式中方程的第四項包含 x 與 $\sin x$ 的乘積，在求這項的拉普拉斯變換時要應用 (5) 計算如下：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x \sin x\} &= -D(\mathcal{L}\{\sin x\}) \\
 &= -D\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) \\
 &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \quad (14)
 \end{aligned}$$

接著計算 (13) 的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{D^2 f(x) - 2Df(x) + f(x) - 2x \sin x\} &= \mathcal{L}\{0\} \\
 s^2 F(s) - sf(0) - Df(0) - 2(sF(s) - f(0)) + F(s) - 2 \times \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} &= 0 \\
 (s-1)^2 F(s) - \frac{4s}{(s^2 + 1)^2} &= 0 \quad (15)
 \end{aligned}$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的微分方程 (13) 變換成以 $F(s)$ 為未知項的代數方程 (15)，由此可解得

$$F(s) = \frac{4s}{(s-1)^2(s^2+1)^2} \quad (16)$$

為求上式的逆拉普拉斯變換，先對上式右端進行部分分式分解。根據有關部分分式分解的理論，假設

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s^2+1)^2} = \frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{(s-1)^2} + \frac{k_3s+k_4}{s^2+1} + \frac{k_5s+k_6}{(s^2+1)^2}$$

從上式可解出 $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 0, k_5 = 0, k_6 = -2$ ，由此可求 (13) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4s}{(s-1)^2(s^2+1)^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2} \right\} \\ &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1!}{(s-1)^{1+1}} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1^2} \right\} \\ &\quad - 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^2+1^2} \right) \left(\frac{1}{s^2+1^2} \right) \right\} \\ &= -e^x + e^x \times x + \cos x - 2 \sin x * \sin x \\ &= -e^x + xe^x + \cos x - 2 \int_{t=0}^{t=x} \sin t \sin(x-t) \\ &= -e^x + xe^x + \cos x - \int_{t=0}^{t=x} (\cos(2t-x) - \cos x) \\ &= -e^x + xe^x + \cos x - \left[\frac{\sin(2t-x)}{2} - t \cos x \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= -e^x + xe^x + \cos x - \sin x + x \cos x \quad (17) \end{aligned}$$

在上面第三行，我們把第二項寫成符合「表 1」中 $\mathcal{L}\{x^1\}$ 的形式，以便接下來在第五行應用「表 1」和 (4)。在第四行，我們把 $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ 分拆成兩個 $\frac{1}{s^2+1}$ 的乘積。由於 $\frac{1}{s^2+1}$ 是 $\sin x$ 的拉普拉斯變換，根據 (7)，可知這個乘積的逆拉普拉斯變換就是 $\sin x$ 與自己的捲積。我們在第六至第九行應用 (6)、「積化和差公式」 $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ 和「微積分基本定理」計算這個捲積。

以上討論的都是微分方程初值問題的例子，接下來考慮以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2 f(x) - 2Df(x) + 5f(x) + 8e^{-x} = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (18)$$

首先求上式的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^2f(x) - 2Df(x) + 5f(x) + 8e^{-x}\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ s^2F(s) - sf(0) - Df(0) - 2(sF(s) - f(0)) + 5F(s) + \frac{8}{s+1} &= 0 \\ (s^2 - 2s + 5)F(s) - Df(0) + \frac{8}{s+1} &= 0 \quad (19)\end{aligned}$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的微分方程 (18) 變換成以 $F(s)$ 為未知項的代數方程 (19) (其中 $Df(0)$ 是待求的常數)，由此可解得

$$F(s) = \frac{Df(0)}{s^2 - 2s + 5} - \frac{8}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} \quad (20)$$

為求上式的逆拉普拉斯變換，先對上式右端第二項進行部分分式分解。根據有關部分分式分解的理論，假設

$$\frac{8}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2s + k_3}{s^2 - 2s + 5}$$

從上式可解出 $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 3$ ，由此可求 (18) 的解如下：

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Df(0)}{s^2 - 2s + 5} - \frac{8}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Df(0)}{s^2 - 2s + 5} - \frac{1}{s+1} + \frac{s-3}{s^2 - 2s + 5}\right\} \\ &= \frac{Df(0)}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)-2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\ &= \frac{Df(0)}{2}e^x \sin(2x) - e^{-x} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\ &= \frac{Df(0)}{2}e^x \sin(2x) - e^{-x} + e^x \cos(2x) - e^x \sin(2x) \quad (21)\end{aligned}$$

在上面第三行，我們用「配方法」把第一和第三項的分母 $s^2 - 2s + 5$ 寫成 $(s-1)^2 + 2^2$ 的形式，並且把第三項的分子 $s-3$ 改寫成 $(s-1)-2$ 。接著在第四和第五行應用「表 1」和 (4)，便可得到以上結果¹。

¹在上面的運算中，其實也可以把 $\frac{8}{(s+1)(s^2-2s+5)}$ 分拆成 $\frac{4}{s+1}$ 與 $\frac{2}{s^2-2s+5}$ 的乘積，由此辨認出這兩者分別是 $4e^{-x}$ 和 $e^x \sin(2x)$ 的拉普拉斯變換。根據 (7)，可知 $\frac{8}{(s+1)(s^2-2s+5)}$ 的逆拉普拉斯變換等於 $4e^{-x}$ 與 $e^x \sin(2x)$ 的捲積。接著便要應用 (6) 求上述捲積： $4e^{-x} * e^x \sin(2x) = \int_{t=0}^{t=x} 4e^{-t}e^{x-t} \sin(2(x-t))$ ，但這個積分的計算步驟頗為繁複。

但上述結果仍然包含未知常數 $Df(0)$ ，為解出這個常數，要利用 (18) 中至今未被使用的邊界條件 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ ，把此一條件代入 (21)，可得

$$\frac{Df(0)}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{4}} = 0$$

由此可解出 $Df(0) = 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2$ ，把此一結果代入 (21)，便最終求得 (18) 的解為

$$f(x) = e^{x-\frac{\pi}{2}} \sin(2x) + e^x \cos(2x) - e^{-x} \quad (22)$$

「捲積」概念和「定理 2」的另一個重要用途是求解某些可被看成包含捲積項的線性沃爾泰拉積分方程。舉例說，考慮以下沃爾泰拉積分方程 (以下方程等於《數學示例：冪級數解》中的 (15))：

$$f(x) + 2 \int_{t=0}^{t=x} \cos(x-t)f(t) - e^{-x} = 0 \quad (23)$$

上式中方程的第二項 $2 \int_{t=0}^{t=x} \cos(x-t)f(t)$ 可被看成 $f(x)$ 與 $2 \cos x$ 的捲積，根據「定理 2」和「表 1」，我們有

$$\mathcal{L} \left\{ 2 \int_{t=0}^{t=x} \cos(x-t)f(t) \right\} = \frac{2s}{s^2+1} F(s) \quad (24)$$

接著計算 (23) 的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ f(x) + 2 \int_{t=0}^{t=x} \cos(x-t)f(t) - e^{-x} \right\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ F(s) + \frac{2s}{s^2+1} F(s) - \frac{1}{s+1} &= 0 \\ \left(1 + \frac{2s}{s^2+1} \right) F(s) - \frac{1}{s+1} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的沃爾泰拉積分方程 (23) 變換成以 $F(s)$ 為未知項的代數方程 (25)，由此可解得

$$F(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^3} \quad (26)$$

為求上式的逆拉普拉斯變換，先對上式右端進行部分分式分解。根據有關部分分式分解的理論，假設

$$\frac{s^2+1}{(s+1)^3} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{(s+1)^2} + \frac{k_3}{(s+1)^3}$$

從上式可解出 $k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 2$ ，由此可求 (23) 的解如下：

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 1}{(s + 1)^3} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^3} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - (-1)} \right\} - 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1!}{(s - (-1))^{1+1}} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2!}{(s - (-1))^{2+1}} \right\} \\
 &= e^{-x} - 2e^{-x}x + e^{-x}x^2 \\
 &= e^{-x}(x - 1)^2 \quad (27)
 \end{aligned}$$

我們在《數學示例：冪級數解》中曾指出使用冪級數方法雖能求得上述解的泰勒級數的首數項，但難以從這些項辨認出 (27) 所示的封閉形式，現在我們看到，使用拉普拉斯變換可以求得 (23) 的解的封閉形式。

以上介紹的都是 1 元函數的 (逆) 拉普拉斯變換，對於 2 元函數 $f(x, y)$ ，我們有關於 y 的拉普拉斯變換 (Laplace transform with respect to y)，以下記作 $F(x, s)$ 或 $\mathcal{L}\{f(x, y)\}^2$ ，其定義如下 (如果以下極限存在)：

$$F(x, s) = \mathcal{L}\{f(x, y)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{y=0}^{y=b} e^{-sy} f(x, y) \quad (28)$$

把上式與 (1) 比較，容易看到「關於 y 的拉普拉斯變換」其實就是把 x 處理成常項 (亦即把 f 處理成以 y 為變項的 1 元函數) 的情況下的 (普通) 拉普拉斯變換，因此前面有關 (普通) 拉普拉斯變換的結果都適用於「關於 y 的拉普拉斯變換」。特別地，(8) 變成

$$\mathcal{L}\{(D_y)^n f(x, y)\} = s^n F(x, s) - s^{n-1} f(x, 0) - s^{n-2} D_y f(x, 0) - \dots - (D_y)^{n-1} f(x, 0) \quad (29)$$

此外，還可證明

$$\mathcal{L}\{(D_x)^n f(x, y)\} = (D_x)^n F(x, s) \quad (30)$$

不難把以上定義和結果推廣到 2 元函數 $f(x, y)$ 「關於 x 的拉普拉斯變換」以及 n 元函數 $f(x_1, \dots, x_n)$ 關於其某個變項的拉普拉斯變換。

上述概念可用來求解偏微分方程，舉例說，考慮以下 2 階 2 元偏微分方程初值-邊值問題：

$$\begin{aligned}
 (D_x)^2 f(x, y) - (D_y)^2 f(x, y) &= 0, \quad x \in (0, 1) \\
 f(0, y) &= 0, f(1, y) = 0; \quad f(x, 0) = 0, D_y f(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (31)
 \end{aligned}$$

²嚴格地說，這裡應為 $\mathcal{L}$ 加一些標記以識別這是「關於 y (而非 x) 的拉普拉斯變換」，不過在具體應用中，這個相關變項通常是確定的，因此不加任何標記也不致產生混淆。

首先運用 (29) 和 (30) 計算上式方程關於 y 的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(D_x)^2 f(x, y) - (D_y)^2 f(x, y)\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ (D_x)^2 F(x, s) - (s^2 F(x, s) - s f(x, 0) - D_y f(x, 0)) &= 0 \\ (D_x)^2 F(x, s) - s^2 F(x, s) + \sin(\pi x) &= 0\end{aligned}\quad (32)$$

接著求 (31) 中邊界條件關於 y 的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(0, y)\} &= \mathcal{L}\{0\}, & \mathcal{L}\{f(1, y)\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ F(0, s) &= 0, & F(1, s) &= 0\end{aligned}\quad (33)$$

接著把 (32) – (33) 中的 s 暫時處理成常數，經上述計算和處理，我們把以 $f(x, y)$ 為未知項的偏微分方程初值-邊值問題 (31) 變換成以 $F(x, s)$ 為未知項 (其中只有 x 是變項， s 則是常項) 的常微分方程邊值問題 (32) – (33)。可以求得 (32) 的通解為

$$F(x, s) = c_1 e^{-sx} + c_2 e^{sx} + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi x) \quad (34)$$

把邊界條件 (33) 代入 (34) 後，可解得 $c_1 = c_2 = 0$ ，因此 (32) – (33) 的特解為

$$F(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi x) \quad (35)$$

接著求上述結果關於 y 的逆拉普拉斯變換 (進行變換時要把 x 處理成常數)，便可求得 (31) 的解如下：

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi x) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \sin(\pi y)\end{aligned}\quad (36)$$

拉普拉斯變換也可用來求解某些微分／積分方程組，具體地說，它可用來把常係數常微分方程組和包含捲積項的線性沃爾泰拉積分方程組變換成代數方程組。舉例說，考慮以下 1 階常係數常微分方程組初值問題：

$$\begin{cases} Df(x) - 2f(x) + 3g(x) = 0 \\ Dg(x) + 2f(x) - g(x) = 0 \end{cases}, \quad f(0) = 8, g(0) = 3 \quad (37)$$

沿用前面介紹的方法，可求得上式的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{cases} (s - 2)F(x, s) + 3G(x, s) - 8 = 0 \\ 2F(x, s) + (s - 1)G(x, s) - 3 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為未知項的微分方程組 (37) 變換成以 $F(x, s)$ 和 $G(x, s)$ 為未知項的代數方程組 (38)。解此方程組，並對結果進行部分分式分解，可得

$$\begin{aligned} F(x, s) &= \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4} \\ G(x, s) &= \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4} \end{aligned} \quad (39)$$

求上述結果的逆拉普拉斯變換，便可得到 (37) 的解如下：

$$f(x) = 5e^{-x} + 3e^{4x}, \quad g(x) = 5e^{-x} - 2e^{4x} \quad (40)$$

接著考慮以下沃爾泰拉積分方程組：

$$\begin{cases} f(x) + \int_{t=0}^{t=x} g(t) - 1 = 0 \\ g(x) - \int_{t=0}^{t=x} f(t) + 1 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

請注意上式中每個方程的第二項都可被看成未知函數與常值函數 1 的捲積，因此可以應用「定理 2」和前面介紹的方法，求得上式的拉普拉斯變換如下：

$$\begin{cases} F(x, s) + \frac{1}{s}G(x, s) - \frac{1}{s} = 0 \\ -\frac{1}{s}F(x, s) + G(x, s) + \frac{1}{s} = 0 \end{cases} \quad (42)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為未知項的沃爾泰拉積分方程組 (41) 變換成以 $F(x, s)$ 和 $G(x, s)$ 為未知項的代數方程組 (42)。解此方程組，可得

$$F(x, s) = \frac{1+s}{s^2+1}, \quad G(x, s) = \frac{1-s}{s^2+1} \quad (43)$$

求上述結果的逆拉普拉斯變換，便可得到 (41) 的解如下：

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad g(x) = \sin x - \cos x \quad (44)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁